DEPARTAMENTUL
MATEMATICĂ-INFORMATICĂ
UNIVERSITATEA DIN PITEȘTI

MATINF

PUBLICAȚIE BIANUALĂ
DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ
PENTRU ELEVI ȘI PROFESORI

Anul II, nr. 4 / 2019

ISSN 2601-9426
ISSN-L 2601-8829

Editura
Universității din Pitești

Editată de: DEPARTAMENTUL MATEMATICĂ-INFORMATICĂ,
UNIVERSITATEA DIN PITEȘTI

Comitetul de redacție:

Stelian Corneliu ANDRONESCU	Eduard ASADURIAN
Tudor BĂLĂNESCU	Costel BĂLCĂU - redactor șef
Loredana BĂLILESCU	Doru CONSTANTIN
Şerban COSTEA	Laurențiu DEACONU
Maria-Crina DIACONU	Ionuț DINCĂ
Mihaela DUMITRACHE	Mihai Armand IONESCU
Florentin IPATE	Constantin GEORGESCU
Raluca Mihaela GEORGESCU	Camelia GHELDIU
Marius MACARIE	Maria MIROIU
Gheorghe NISTOR	Antonio Mihail NUICĂ
Viorel PĂUN	Doru Anastasiu POPESCU
Marin POPESCU	Nicolae-Doru STĂNESCU
Alina Florentina ȘTEFAN	Cristina TUDOSE
Adrian ŢURCANU	Corneliu UDREA

Tehnoredactare computerizată: Mihail TĂNASE, e-mail: mihaimit@yahoo.it

Redacția: Departamentul Matematică-Informatică, Universitatea din Pitești, Str. Târgu din Vale, nr. 1, Pitești, tel. 0348453247, e-mail: revista.matinf@upit.ro

Forma digitală a revistei poate fi accesată la adresa: http://matinf.upit.ro

Publicată de: Editura Universității din Pitești, https://www.upit.ro/ro/relatii-cu-mediul-socio-economic/centre-suport/editura

Anul II, Nr. 4, Decembrie 2019

Cuprins

ARTICOLE ȘI NOTE DE MATEMATICĂ 5

M. Chirciu

În legătură cu Problema 4093 din Crux Mathematicorum 5

L.M. Giugiuc

O aplicație a articolului ,,An unusual configuration" 9

M. Ionescu

Aplicaţii ale calculului vectorial în rezolvarea unor probleme de geometrie 11

ARTICOLE ȘI NOTE DE INFORMATICĂ 17

D. Constantin, A.F. Ștefan

Elemente computaționale de deducție logică 17

M.R. Găman, M. Miroiu

Prezentarea Concursului Dräexlmaier IT Day, Ediția I, 11 ianuarie 2019 29

RUBRICA DE ROBOTICĂ 37

G.C. Stanciu

Programarea roboților care folosesc un sistem de rulare Mecanum 37

PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU EXAMENE 41

Teste pentru examenul de Evaluare Națională 41

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Științe ale naturii 47

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Matematică-Informatică 52

Teste pentru admiterea la facultate 58

Teste grilă pentru admiterea la facultate 61

PROBLEME DE INFORMATICĂ PENTRU EXAMENE 68

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Științe ale naturii 68

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Matematică-Informatică 73

PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU CONCURSURI 78

Rezolvarea problemelor pentru liceu din MATINF nr. 2 78

Probleme propuse pentru liceu 87

PROBLEME DE INFORMATICĂ PENTRU CONCURSURI 91

Probleme propuse 91

ISTORIOARE DIN LUMEA MATEMATICII ȘI A INFORMATICII 101

S.C. Andronescu

Joseph-Louis Lagrange, ,,piramida grandioasă a științelor matematice" 101

ARTICOLE ȘI NOTE DE MATEMATICĂ

În legătură cu Problema 4093 din Crux Mathematicorum

Marin Chirciu [1]

Aplicația 1 (Problema 4093 din Crux Mathematicorum, Vol. 41, No. 10 (Dec.2015) - propusă de Dragoljub Milosević)**.** *Let ABC be an arbitrary triangle. Let r and R be the inradius and the circumradius of ABC, respectively. Let m_a be the length of the median from vertex A to side BC and let wa be the length of the internal bisector of $\sphericalangle A$ to side BC. Define m_b; m_c; w_b and w_c similarly. Prove that*

$$\frac{a^2}{m_a w_a}+\frac{b^2}{m_b w_b}+\frac{c^2}{m_c w_c}\leq 4\left(\frac{R}{r}-1\right).$$

Dragoljub Milosević, Serbia

Soluție. Folosim inegalitatea lui L. Panaitopol $m_a l_a \geq p\left(p-a\right)$. (Notație $w_a=l_a$).

Obținem: $\sum \frac{a^2}{m_a l_a}\leq \sum \frac{a^2}{p\left(p-a\right)}=\frac{4\left(R-r\right)}{r}$, care rezultă din: $\sum \frac{a^2}{p-a}=\frac{4p\left(R-r\right)}{r}$, adevărată din $\sum \frac{a^2}{p-a}=\frac{\sum a^2\left(p-b\right)\left(p-c\right)}{\prod\left(p-a\right)}=\frac{4p^2r\left(R-r\right)}{r^2p}=\frac{4\left(R-r\right)}{r}$, $\prod\left(p-a\right)=r^2p$ și $\sum a^2\left(p-b\right)\left(p-c\right)=4p^2r\left(R-r\right)$. Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Să determinăm o inegalitate de semn contrar.

Aplicația 2. *În $\triangle ABC$*

$$\frac{a^2}{m_a w_a}+\frac{b^2}{m_b w_b}+\frac{c^2}{m_c w_c}\geq \left(\frac{4r}{R}\right)^2.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție. Folosim inegalitatea lui Bergström $m_a l_a \leq m_a^2$, inegalitatea lui Leibniz $\sum a^2\leq 9R^2$ și inegalitatea lui Mitrinović $p^2\geq 27r^2$. Obținem:

$$\sum \frac{a^2}{m_a l_a}\geq \sum \frac{a^2}{m_a^2}\geq \frac{\left(a+b+c\right)^2}{m_a^2+m_b^2+m_c^2}=\frac{4p^2}{\frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)}=\frac{16p^2}{3\sum a^2}$$

$$\geq \frac{16p^2}{3\cdot 9R^2}=\frac{16p^2}{27R^2}\geq \frac{16\cdot 27r^2}{27R^2}=\frac{16r^2}{R^2}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Se poate scrie dubla inegalitate:

[1]Profesor, Colegiul Național ,,Zinca Golescu", Pitești, marin.chirciu@yahoo.com

Aplicația 3. *În* $\triangle ABC$

$$\left(\frac{4r}{R}\right)^2 \leq \frac{a^2}{m_a w_a} + \frac{b^2}{m_b w_b} + \frac{c^2}{m_c w_c} \leq 4\left(\frac{R}{r} - 1\right).$$

Soluție. Vezi inegalitățile din Aplicațiile 1 și 2.

Egalitățile au loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

În aceeași clasă de probleme propunem:

Aplicația 4. *În* $\triangle ABC$

$$\frac{8p}{R^2} \leq \frac{a}{m_a l_a} + \frac{b}{m_b l_b} + \frac{c}{m_c l_c} \leq \frac{2}{p}\left(\frac{2R}{r} - 1\right).$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție. Inegalitatea din dreapta.

Folosim inegalitatea $m_a l_a \geq p(p-a)$.

Obținem: $\sum \frac{a}{m_a l_a} \leq \sum \frac{a}{p(p-a)} = \frac{2(2R-r)}{rp}$, care rezultă din: $\sum \frac{a}{p-a} = \frac{2(2R-r)}{r}$, adevărată din $\sum \frac{a}{p-a} = \frac{\sum a(p-b)(p-c)}{\prod (p-a)} = \frac{2pr(R-r)}{r^2 p} = \frac{2(2R-r)}{r}$, $\prod (p-a) = r^2 p$ și

$$\sum a(p-b)(p-c) = 2pr(2R-r).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Inegalitatea din stânga.

Folosim inegalitatea $m_a l_a \leq m_a^2$. $\sum a m_a^2 = \frac{p}{2}\left(p^2 + 5r^2 + 2Rr\right)$ inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$ și inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$. Obținem:

$$\sum \frac{a}{m_a l_a} \geq \sum \frac{a}{m_a^2} = \sum \frac{a^2}{a m_a^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a m_a^2 + b m_b^2 + c m_c^2}$$

$$= \frac{4p^2}{\frac{p}{2}\left(p^2 + 5r^2 + 2Rr\right)} = \frac{8p}{p^2 + 5r^2 + 2Rr} \geq \frac{8p}{9R^2}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Aplicația 5. *În* $\triangle ABC$

$$\frac{4}{3R^2} \leq \frac{1}{m_a l_a} + \frac{1}{m_b l_b} + \frac{1}{m_c l_c} \leq \frac{1}{p^2}\left(\frac{4R}{r} + 1\right).$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție. Inegalitatea din dreapta.

Folosim inegalitatea $m_a l_a \geq p\,(p-a)$.

Obținem:

$\sum \frac{1}{m_a l_a} \leq \sum \frac{1}{p\,(p-a)} = \frac{4R+r}{rp^2}$, care rezultă din: $\sum \frac{1}{p-a} = \frac{4R+r}{rp}$, adevărată din $\sum \frac{1}{p-a} = \frac{\sum (p-b)\,(p-c)}{\prod (p-a)} = \frac{r\,(4R+r)}{r^2 p} = \frac{4R+r}{rp}$,$\prod (p-a) = r^2 p$ și

$$\sum (p-b)\,(p-c) = r\,(4R+r)\,.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Inegalitatea din stânga.

Folosim inegalitatea $m_a l_a \leq m_a^2$, inegalitatea lui Bergström $\sum m_a^2 = \frac{3}{4}\sum a^2$,$\sum a^2 = 2\left(p^2 - r^2 - 4Rr\right)$ și inegalitatea lui Leibniz $\sum a^2 \leq 9R^2$.

Obținem:

$$\sum \frac{1}{m_a l_a} \geq \sum \frac{1}{m_a^2} \geq \frac{(1+1+1)^2}{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2} = \frac{9}{\frac{3}{4}\sum a^2} \geq \frac{12}{9R^2} = \frac{4}{3R^2}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Aplicația 6. *În* $\triangle ABC$

$$\frac{32p^3}{81R^2} \leq \frac{a^3}{m_a l_a} + \frac{b^3}{m_b l_b} + \frac{c^3}{m_c l_c} \leq \frac{9}{4S}\left(11R^3 - 56r^3\right).$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție. Inegalitatea din dreapta.

Folosim inegalitatea $m_a l_a \geq p\,(p-a)$.

Obținem: $\sum \frac{a^3}{m_a l_a} \leq \sum \frac{a^3}{p\,(p-a)} = \frac{2}{rp}\left[p^2\,(2R-3r) + r^2\,(4R+r)\right]$, care rezultă din: $\sum \frac{a^3}{p-a} = \frac{2}{r}\left[p^2\,(2R-3r) + r^2\,(4R+r)\right]$, adevărată din: $\sum \frac{a^3}{p-a} = \frac{\sum a^3\,(p-b)\,(p-c)}{\prod (p-a)} = \frac{2pr\left[p^2\,(2R-3r) + r^2\,(4R+r)\right]}{r^2 p} = \frac{2}{r}\left[p^2\,(2R-3r) + r^2\,(4R+r)\right]\prod (p-a) = r^2 p$ și

$$\sum a^3\,(p-b)\,(p-c) = 2pr\left[p^2\,(2R-3r) + r^2\,(4R+r)\right].$$

Arătăm că: $\left[p^2\,(2R-3r) + r^2\,(4R+r)\right] \leq \frac{9}{8}\left(11R^3 - 56r^3\right)$, care rezultă din inegalitatea Blundon-Gerretsen $p^2 \leq \frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)} \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$ și inegalitatea $R \geq 2r$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Inegalitatea din stânga.

Folosim inegalitatea $m_a l_a \leq m_a^2$, inegalitatea lui Hölder, $\sum m_a^2 = \frac{3}{4}\sum a^2, \sum a^2 = 2\left(p^2 - r^2 - 4Rr\right)$ și inegalitatea $\sum a^2 \leq 9R^2$.

Obținem:

$$\sum \frac{a^3}{m_a l_a} \geq \sum \frac{a^3}{m_a^2} \geq \frac{(a+b+c)^3}{3\left(m_a^2+m_b^2+m_c^2\right)} = \frac{8p^3}{\frac{9}{4}\sum a^2} \geq \frac{32p^3}{9 \cdot 9R^2} = \frac{32p^3}{81R^2}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Aplicația 7. *În* $\triangle ABC$

$$48r^2 \leq \frac{a^4}{m_a l_a} + \frac{b^4}{m_b l_b} + \frac{c^4}{m_c l_c} \leq \frac{16}{r}\left(R^3 - 5r^3\right).$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție. Inegalitatea din dreapta.

Folosim inegalitatea $m_a l_a \geq p(p-a)$.

Obținem: $\sum \frac{a^4}{m_a l_a} \leq \sum \frac{a^4}{p(p-a)} = \frac{4}{r}\left[p^2(R-2r) + r^2(5R+2r)\right]$, care rezultă din: $\sum \frac{a^4}{p-a} = \frac{4p}{r}\left[p^2(R-2r) + r^2(5R+2r)\right]$, adevărată din: $\sum \frac{a^4}{p-a} = \frac{\sum a^4(p-b)(p-c)}{\prod(p-a)} = \frac{4p^2 r\left[p^2(R-2r) + r^2(5R+2r)\right]}{r^2 p} = \frac{4p}{r}\left[p^2(R-2r) + r^2(5R+2r)\right]\prod(p-a) = r^2 p$ și

$$\sum a^4(p-b)(p-c) = 4p^2 r\left[p^2(R-2r) + r^2(5R+2r)\right].$$

Arătăm că: $\left[p^2(R-2r) + r^2(5R+2r)\right] \leq 4\left(R^3 - 5r^3\right)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$ și inegalitatea $R \geq 2r$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Inegalitatea din stânga.

Folosim inegalitatea $m_a l_a \leq m_a^2$, inegalitatea lui Bergström, $\sum m_a^2 = \frac{3}{4}\sum a^2, \sum a^2 = 2\left(p^2 - r^2 - 4Rr\right)$, $\sum m_a^2 = \frac{3}{4}\sum a^2$ și inegalitatea $\sum a^2 \geq 36r^2$.

Obținem:

$$\sum \frac{a^4}{m_a l_a} \geq \sum \frac{a^4}{m_a^2} \geq \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{m_a^2+m_b^2+m_c^2} = \frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\frac{3}{4}\sum a^2} = \frac{4}{3}\sum a^2 \geq \frac{4}{3} \cdot 36r^2 = 48r^2.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

O aplicație a articolului ,,An unusual configuration"

Leonard Mihai Giugiuc [1]

În februarie 2017, autorul a trimis spre publicare revistei Crux Mathematicorum din Canada, următoarea Problemă deschisă: Fie $n \geq 4$ și fie $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$ astfel încât

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Demonstrați că

$$\sqrt{\frac{n-2}{n}} \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + \frac{\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-2}\right)^2}{2} \cdot a_1 a_2 \ldots a_n \geq n - 1.$$

Autorul, împreună cu editorii, au încercat o perioadă să o închidă, dar fără succes. În cele din urmă, ea a fost închisă de către autor, la începutul anului 2018. Pentru început, vom reaminti câteva fapte demonstrate în articolul ,,An Unusual Configuration".

1. $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq n$.
2. If $a_1, a_2, \ldots, a_n$ are real numbers satisfying $\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j = \frac{n(n-1)}{2}$ and $n \leq a_1 + a_2 + \ldots + a_n < (n-1)\sqrt{\frac{n}{n-2}}$, then all of them are strictly positive.
3. If $a_1, a_2, \ldots, a_n$ are real numbers satisfying $\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j = \frac{n(n-1)}{2}$ and $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq n$, then there exists $t \geq 1$ such that $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n\left(\frac{t^2+1}{2t}\right)$.

Lemma 1. *Let $t \in \left[1, \sqrt{\frac{n}{n-2}}\right)$ be a fixed real number. We consider the positive real numbers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ satisfying $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n\left(\frac{t^2+1}{2t}\right)$ and $\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j = \frac{n(n-1)}{2}$. Then* $\min(a_1 a_2 \ldots a_n) = \frac{t^{n-2}\left[n-(n-2)t^2\right]}{2}$.

Notăm $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \cdot n\left(\frac{t^2+1}{2t}\right)$, $t \geq 1$.

Cazul 1: $1 \leq t < \sqrt{\frac{n}{n-2}}$.

Conform Lemei 1, e suficient să arăt că

$$\sqrt{n(n-2)}\left(\frac{t^2+1}{2t}\right) + \left(n - 1 - \sqrt{n(n-2)}\right)\frac{t^{n-2}\left[n-(n-2)t^2\right]}{2} \geq n - 1.$$

$$\sqrt{n(n-2)}\left(\frac{t^2+1}{2t}\right) + \left(n - 1 - \sqrt{n(n-2)}\right)\frac{t^{n-2}\left[n-(n-2)t^2\right]}{2} \geq n - 1 \Leftrightarrow$$

[1]Profesor, Colegiul Național ,,Traian", Drobeta Turnu Severin, leonardgiugiuc@yahoo.com

$$\sqrt{n(n-2)}\left(t^2+1\right)+\left(n-1-\sqrt{n(n-2)}\right)\left(t^{n-1}\left[n-(n-2)t^2\right]\right)-2(n-1)t\geq 0,$$

pe $1\leq t<\sqrt{\frac{n}{n-2}}$. Considerăm funcția

$$f(t)=\sqrt{n(n-2)}\left(t^2+1\right)+\left(n-1-\sqrt{n(n-2)}\right)\left(t^{n-1}\left[n-(n-2)t^2\right]\right)-2(n-1)t$$

pe $\left[1,\sqrt{\frac{n}{n-2}}\right]$. Avem:

$$f'(t)=2\sqrt{n(n-2)}t+\left(n-1-\sqrt{n(n-2)}\right)\left[n(n-1)t^{n-2}-(n-2)(n+1)t^n\right]-2(n-1)$$

și

$$\frac{f''(t)}{\sqrt{n(n-2)}}=2-\sqrt{n(n-2)}\left(n-1-\sqrt{n(n-2)}\right)t^{n-3}\left[(n+1)t^2-(n-1)\right],$$

$\forall t\in\left[1,\sqrt{\frac{n}{n-2}}\right]$. Cum funcția $g(t)=t^{n-3}\left[(n+1)t^2-(n-1)\right]$ este strict crescătoare, ca produs de funcții strict crescătoare și strict pozitivă, deducem că f'' este strict descrescătoare. Cum f'' este continuă și $f''(1)>0$, deducem că sau f' este strict crescătoare, sau că există $\gamma\in\left(1,\sqrt{\frac{n}{n-2}}\right)$ astfel încât f' este strict crescătoare pe $[1,\gamma]$ și strict descrescătoare pe $\left[\gamma,\sqrt{\frac{n}{n-2}}\right]$. Cum f' este continuă și $f'(1)=0$, deducem că sau f este strict crescătoare, sau că există $\delta\in\left(1,\sqrt{\frac{n}{n-2}}\right)$ astfel încât f este strict crescătoare pe $[1,\delta]$ și strict descrescătoare pe $\left[\delta,\sqrt{\frac{n}{n-2}}\right]$.

În concluzie, $\min f=\min\left\{f(1),f\left(\sqrt{\frac{n}{n-2}}\right)\right\}=0$.

Cazul 2: $t\geq\sqrt{\frac{n}{n-2}}$.

Avem:

$$\sqrt{\frac{n-2}{n}}(a_1+a_2+\ldots+a_n)+\frac{\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-2}\right)^2}{2}a_1a_2\ldots a_n\geq\sqrt{\frac{n-2}{n}}(a_1+a_2+\ldots+a_n)=$$

$$=\sqrt{n(n-2)}\left(\frac{t^2+1}{2t}\right)\geq n-1.$$

Demonstrația este completă. Să remarcăm că egalitatea are loc atunci când toate numerele sunt egale cu 1 sau atunci când un număr este 0 și restul sunt egale cu $\sqrt{\frac{n}{n-2}}$.

În încheiere, propunem cititorilor spre rezolvare următoarea:

Fie $n\geq 4$ un număr întreg. Pentru ce valori ale lui $k>0$ inegalitatea

$$\sqrt{\frac{n-2}{n}}\cdot(a_1+a_2+\ldots+a_n)+\frac{\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-2}\right)^2}{2}\cdot(a_1a_2\ldots a_n)^k\geq n-1$$

are loc $\forall a_1,a_2,\ldots,a_n\geq 0$, astfel încât $\sum\limits_{1\leq i<j\leq n}a_ia_j=\frac{n(n-1)}{2}$?

Bibliografie

[1] L.M. Giugiuc, *An Unusual Configuration*, MATINF, nr. 3 (2019), 25-26.

Aplicaţii ale calculului vectorial în rezolvarea unor probleme de geometrie

Marin Ionescu [1]

Prezentul articol abordează probleme de geometrie privind centrele de greutate şi coliniaritate. Câteva propoziţii şi rezolvarea mai multor probleme vor scoate în evidenţă utilitatea practică a abordării vectoriale. Folosind calculul vectorial, poziţia unui punct în plan este bine determinată dacă se alege un punct fix O al planului ca origine şi se cunoaşte vectorul $\overrightarrow{r}_A = \overrightarrow{OA}$, numit vectorul de poziţie al punctului A faţă de O.

Propoziţia 1. *Un vector $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ este bine determinat de vectorii de poziţie ai punctelor A, B prin relaţia: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{r}_B - \overrightarrow{r}_A$. (Chasles)*

Propoziţia 2. *(Vectorul de poziţie al mijlocului unui segment.) Fie A, B două puncte în plan şi M mijlocul segmentului $[AB]$ Atunci: $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$.*

Demonstraţie. Din $AM = MB \Rightarrow \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{0}$. Obţinem: $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM}) = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM}) = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$. □

Propoziţia 3. *(Vectorul de poziţie al punctului care împarte un segment într-un raport dat.) Fie A, B două puncte în plan şi $M \in (AB)$ astfel încât $\frac{MA}{MB} = k$. Atunci: $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}}{1+k}$*

Demonstraţie. Din $\dfrac{MA}{MB} = k$, rezultă $AM = kMB \Rightarrow \overrightarrow{AM} + k\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{0}$. Obţinem:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{1+k}\left(\overrightarrow{OM} + k\overrightarrow{OM}\right) = \frac{1}{1+k}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} + k\overrightarrow{OB} + k\overrightarrow{BM}\right) = \frac{\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}}{1+k}.$$

□

Propoziţia 4. *(O condiţie vectorială ca trei puncte să fie coliniare.) Punctele A, B, C sunt coliniare, dacă şi numai dacă: $(\exists)\alpha \in \mathbb{R}^\star$ astfel încât: $\overrightarrow{OB} = \alpha\overrightarrow{OA} + (1-\alpha)\overrightarrow{OC}$.*

Demonstraţie. Se obţin succesiv următoarele relaţii echivalente: $\overrightarrow{OB} = \alpha\overrightarrow{OA} + (1-\alpha)\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \alpha(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC})$, $\overrightarrow{CB} = \alpha\overrightarrow{CA}$, punctele A, B, C sunt coliniare. □

Propoziţia 5. *(Vectorul de poziţie al centrului de greutate al unui triunghi.) Fie ABC un triunghi şi G centrul său de greutate. Atunci: $\overrightarrow{OG} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$.*

[1]Profesor, Colegiul Național ,,Zinca Golescu”, Pitești, marin.ionescu61@gmail.com

Demonstraţie. Fie M mijlocul laturii $[BC]$. Atunci $G \in (AM)$ şi $\dfrac{AG}{GM} = 2$. Rezultă $\overrightarrow{OG} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OM}}{3} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$. □

Propoziția 6. *(Condiția vectorială ca două triunghiuri să aibă același centru de greutate.) Triungiurile ABC şi $A'B'C'$ au același centru de greutate, dacă și numai dacă*

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{0}.$$

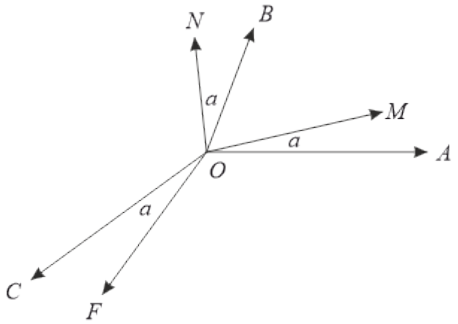


Figura 1

Demonstraţie. Fie G, G' centrele de greutate ale triunghiurilor ABC şi $A'B'C'$. Din $\overrightarrow{OG} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$, $\overrightarrow{OG'} = \dfrac{\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}}{3}$, se obțin succesiv următoarele relații echivalente: $G = G'$, $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OG'}$, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}$, $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{0}$. □

Propoziția 7. *(Rotirea unui sistem de vectori în jurul unui punct cu un anumit unghi.) Fie trei vectori $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ în plan astfel încât $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$. Se consideră în plan vectorii $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ care formează unghiuri egale şi la fel orientate cu vectorii $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$, astfel încât $\frac{|\overrightarrow{u}|}{|\overrightarrow{a}|} = \frac{|\overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{b}|} = \frac{|\overrightarrow{w}|}{|\overrightarrow{c}|} = k$, $k \in (0, \infty)$. Atunci $\overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$.*

Demonstraţie. Sistemul de vectori $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ se obţine prin rotirea sistemului $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ cu un unghi α şi apoi se multiplică cu k. Relaţia este evidentă. □

Observația 1. Dacă $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{d}$, atunci: $\overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{s}$, unde vectorul $\overrightarrow{s}$ se obţine din $\overrightarrow{d}$ prin rotire cu unghiul dat și multiplicare cu k.

Propoziția 8. *(Relația lui Sylvester.) În orice triunghi ABC avem relația $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$ unde O este centrul cercului circumscris triunghiului și H ortocentrul acestuia.*

Demonstraţie. În cazul când triunghiul ABC este dreptunghic, relația este evidentă. Dacă $m(\widehat{A}) = 90°$ atunci $H = A$ și O este mijlocul laturii $[BC]$, iar relația se reduce la $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$, evident adevărată. Dacă triunghiul nu este dreptunghic, fie D punctul diametral opus lui A în cercul circumscris triunghiului și P mijlocul laturii $[BC]$.

Avem $BH \perp AC$ și $DC \perp AC$, deci $BH \| DC$. Analog $CH \perp AB$ și $DB \perp AB$, deci $CH \| AB$. Rezultă $BHCD$ paralelogram. Obținem că mijlocul diagonalei $[HD]$ coincide cu mijlocul P al laturii $[BC]$.

În triunghiul AHD, OP este linie mijlocie deci $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OP}$. Avem $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA}$ de unde $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$. □

Aplicații

Aplicația 1. *(Teorema lui Pappus.) Se consideră un triunghi ABC şi punctele $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CA)$ astfel încât: $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{BN}{NC} = \dfrac{CP}{PA}$. Să se demonstreze că triunghiurile ABC şi MNP au acelaşi centru de greutate.*

Demonstraţie. Fie $\dfrac{AM}{MB} = k$, rezultă $AM = \lambda AB$, $BN = \lambda BC$, $CP = \lambda CA$, unde $\lambda = \dfrac{k}{k+1}$.

Obținem: $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \lambda\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right) = \overrightarrow{0}$ și se aplică Propoziția 6. □

Aplicația 2. *Se consideră paralelogramul $ABCD$ şi punctele $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CD)$, $Q \in (DA)$. Fie G_1, G_2, G_3, G_4 centrele de greutate ale triunghiurilor AMQ, BNM, CPN, respectiv DQP. Să se demonstreze că patrulaterul $G_1G_2G_3G_4$ este paralelogram.*

Marian Teler, Concursul, ‚Gheorghe Ţiţeica", Costeşti, 2006

Demonstraţie. Fie $O \in AC \cap BD$ și E, F mijloacele segmentelor G_1G_3, G_2G_4.

Avem:

$$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OG_1} + \overrightarrow{OG_3}) = \frac{1}{6}\left(\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}\right)\overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OG_2} + \overrightarrow{OG_4}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}\right) = \frac{1}{6}\left(\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}\right).$$

Rezultă $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OF}$, $E = F$, diagonalele patrulaterului $G_1G_2G_3G_4$ au acelasi mijloc, $G_1G_2G_3G_4$ este paralelogram. □

Aplicația 3. *În planul paralelogramului $ABCD$ se consideră punctele M, N, P, Q astfel încât $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{DQ}$. Să se demonstreze că $MNPQ$ este paralelogram.*

Marian Teler, Problema 24280, GM 3/2000

Demonstraţie. Fie $O \in AC \cap BD$ și E, F mijloacele segmentelor MP, NQ. Avem:

$$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CP}\right),$$

$$\overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OQ}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DQ}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{DQ}\right).$$

Rezultă $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OF}$, $E = F$, diagonalele patrulaterului $MNPQ$ au același mijloc, $MNPQ$ este paralelogram. □

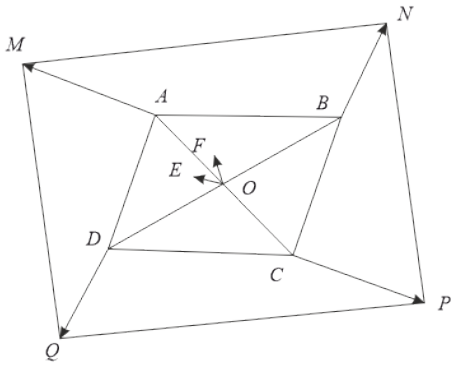


Figura 2

Aplicația 4. *Fie ABC un triunghi oarecare. Pe laturile sale AB, BC, CA construim trei triunghiuri asemenea ABC_1, BCA_1, CAB_1, la fel orientate. Să se arate că:*

i) Triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ au acelaşi centru de greutate.
ii) Cu segmentele AA_1, BB_1, CC_1 se poate construi un triunghi.

M Dincă, Problema C:1188, GM 10/1991, (*O generalizare a teoremei lui Pappus*)

Demonstraţie. Deoarece triunghiurile ABC_1, BCA_1, CAB_1 sunt asemenea și la fel orientate, avem:

$$\frac{BC_1}{BA} = \frac{CA_1}{CB} = \frac{AB_1}{AC} = k,$$

$BC_1 = kBA$, $CA_1 = kCB$, $AB_1 = kAC$.
$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{BC_1}+\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{0}$.

Rezultă:
$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA_1}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{0}$.

Cu aceasta afirmațiile i) și ii) sunt evidente. □

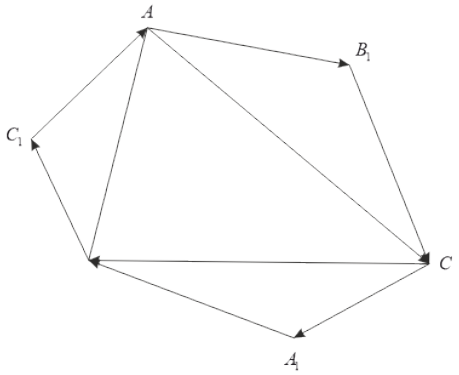


Figura 3

Aplicația 5. *Fie triunghiul ABC iar M, N, P mijloacele laturilor AB, BC, CA. Pe mediatoarele segmentelor AB, BC și CA se consideră în interiorul triunghiului punctele C', A' respectiv B' astfel încât $\frac{MC'}{AB} = \frac{NA'}{BC} = \frac{PB'}{AC}$. Să se demonstreze că triunghiurile ABC și $A'B'C'$ au același centru de greutate.*

Călina Ștefănescu, Problema C:1152, GM 7/1991

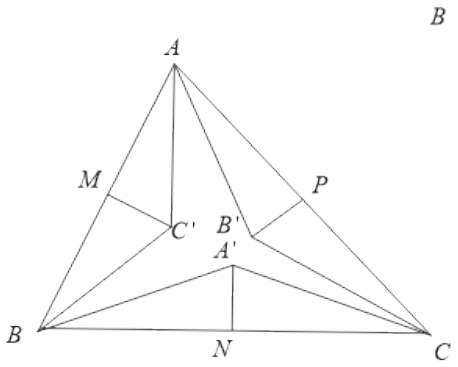


Figura 4

Demonstraţie. Triunghiurile ABC', BCA', CAB' sunt asemenea. Se folosește Aplicația 4. □

Aplicația 6. *Fie M un punct mobil în interiorul triunghiului ABC, G_a, G_b, G_c centrele de greutate ale triunghiurilor BMC, CMA respectiv AMB, iar G_o centrul de greutate al triunghiului $G_aG_bG_c$.*

Să se arate că MG_o trece printr-un punct fix.

Marius Crainic, Problema 22330, GM 4/1991

Demonstraţie. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC, $\overrightarrow{OG} = \dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$.

$$\overrightarrow{OG_o} = \frac{\overrightarrow{OG_a}+\overrightarrow{OG_b}+\overrightarrow{OG_c}}{3} = \frac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OM}}{9}$$

$$= \frac{2}{3}\overrightarrow{OG} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OM}.$$

Conform Propoziției 4, rezultă că punctele M, G_o, G sunt coliniare, $\Rightarrow MG_o$ trece prin punctul fix G. □

Aplicația 7. *Fie ABC un triunghi înscris într-un cerc $\mathcal{C}$ şi $D \in (BC)$, $E \in (AC)$, $F \in (AB)$ astfel încât $\frac{DB}{DC} = \frac{EC}{EA} = \frac{FA}{FB}$. Dacă $AD \cap \mathcal{C} = \{M\}$, $BE \cap \mathcal{C} = \{N\}$, $CF \cap \mathcal{C} = \{P\}$, să se arate că triunghiurile ABC şi MNP au acelaşi centru de greutate dacă şi numai dacă triunghiurile BMC, CNA şi APB au aceeaşi arie.*

Marin Ionescu, Pitești

Demonstraţie. Dacă $\frac{DB}{DC} = \frac{EC}{EA} = \frac{FA}{FB} = k$ se obţin relaţiile: $\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}}{1+k}$, $\overrightarrow{BE} = \frac{\overrightarrow{BC} + k\overrightarrow{BA}}{1+k}$, $\overrightarrow{CF} = \frac{\overrightarrow{CA} + k\overrightarrow{CB}}{1+k}$ și $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{0}$.

Fie $s_1 = \sigma(BMC)$, $s_2 = \sigma(CNA)$, $s_3 = \sigma(APB)$, $s = \sigma(ABC)$. Se obţin cu uşurinţă $\frac{AD}{AM} = \frac{\sigma(ADB)}{\sigma(ABM)} = \frac{\sigma(ADC)}{\sigma(ACM)} = \frac{\sigma(ADB)+\sigma(ADC)}{\sigma(ABM)+\sigma(ACM)} = \frac{s}{s+s_1}$ și analoagele $\frac{BE}{BN} = \frac{s}{s+s_2}$; $\frac{CF}{CP} = \frac{s}{s+s_3}$ şi de aici relaţiile vectoriale: $\overrightarrow{AM} = \frac{s+s_1}{s}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BN} = \frac{s+s_2}{s}\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CP} = \frac{s+s_3}{s}\overrightarrow{CF}$.

Triunghiurile ABC şi MNP au acelaşi centru de greutate $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = 0 \Leftrightarrow \frac{s+s_1}{s}\overrightarrow{AD} + \frac{s+s_2}{s}\overrightarrow{BE} + \frac{s+s_3}{s}\overrightarrow{CF}$ şi dacă ţinem cont că $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{0}$, obţinem ușor $s_1 = s_2 = s_3$. □

Observația 2. În cazul $\frac{DB}{DC} = \frac{EC}{EA} = \frac{FA}{FB} = 1$ se poate arăta că triunghiurile BMC, CNA, APB au aceeași arie dacă și numai dacă triunghiul ABC este echilateral.

Probleme propuse

Problema 1. *Fie $[AB]$ şi $[CD]$ două coarde perpendiculare ale unui cerc de centru O. Dacă $AB \cap CD = P$, să se demonstreze relaţia: $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 2 \cdot \overrightarrow{PO}$.*

(Olimpiada de matematică, Etapa locală, Constanţa 2006)

Problema 2. *Se dă paralelogramul $ABCD$ şi $P \in BC$ astfel încât $PB > PC$. Fie $\{M\} = AP \cap DC$. Să se arate că centrele de greutate ale triunghiurilor AMD, respectiv PMC şi punctul M sunt trei puncte coliniare.*

(Abdula Atila, Concursul revistei Arhimede, Bucureşti, 2005)

Problema 3. *Fie triunghiul ABC şi punctul $M \in Int(ABC)$. Dacă G, G_A, G_B, G_C sunt centrele de greutate ale triunghiurilor ABC, MBC, MAC, respectiv MAB, să se arate că $\overrightarrow{AG_A} + \overrightarrow{BG_B} + \overrightarrow{CG_C} = \overrightarrow{0}$ dacă şi numai dacă $M = G$.*

(Nicolae Papacu, Concursul „Gheorghe Mihoc", Slobozia, 2006)

Problema 4. *Pe laturile triunghiului ABC se consideră punctele $M \in (AB), N \in (BC), P \in (CA)$ şi se notează $\frac{MA}{AB} = m$, $\frac{NB}{BC} = n$, $\frac{PC}{CA} = p$. Demonstraţi că centrul de greutate al triunghiului MNP aparţine medianei din A a triunghiului ABC dacă şi numai dacă $2n = m + p$.*

(Marian Andronache, GM 3/2000)

Problema 5. *În triunghiul ascuţitunghic ABC, H este ortocentrul, iar A_1, B_1, C_1 simetricele lui H faţă de mijloacele laturilor $[BC]$, $[AC]$, respectiv $[AB]$. Arătaţi că dacă triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ au acelaşi centru de greutate, atunci triunghiul ABC este echilateral.*

(Carmen Boţea, Concursul „Trident", 2006)

Problema 6. *Se consideră patrulaterul convex $ABCD$ şi G_1, G_2, G_3, G_4 centrele de greutate ale triunghiurilor BCD, ACD, ABD şi ABC. Să se demonstreze că dreptele AG_1, BG_2, CG_3, DG_4 sunt concurente.*

(Marius Burtea, Georgeta Burtea, Manual pentru clasa a IX-a)

Problema 7. *Fie $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ mijloacele laturilor unui hexagon convex. Să se arate că triunghiurile $A_1A_3A_5$ şi $A_2A_4A_6$ au acelaşi centru de greutate.*

(Marius Burtea, Georgeta Burtea, Manual pentru clasa a IX-a)

ARTICOLE ȘI NOTE DE INFORMATICĂ

Elemente computaționale de deducție logică

Doru Constantin [1], *Florentina-Alina Ștefan* [2]

În acest articol se precizează modul de lucru cu elementele de bază din logica matematică și computațională în aplicații ce îmbină fundamentele teoretice cu cele algoritmice specifice prelucrărilor propozițiilor logice. Aplicațiile algoritmice sunt redate în partea a doua a lucrării în care se descrie sistemul de inferență și deducție logică Gentzen cu precizarea regulilor de inferență Gentzen, precum și algoritmul de deducție logică bazat pe regulile de inferență Gentzen.

1 Definirea elementelor de bază ale unui limbaj de calcul cu propoziții logice

Pentru reprezentarea elementelor dintr-un limbaj de calcul cu propoziții logice se utilizează un vocabular asociat limbajului de forma $V \cup L \cup S$, unde:

* V este mulțimea de propoziții logice elementare; $V \neq \emptyset$. De regulă se utilizează litere din alfabetul latin sau grecesc pentru a desemna simbolurile din mulțimea V.
* $L = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg\}$ este mulțimea de conective logice utilizate în limbajul de calcul cu propoziții logice: conjuncția logică, disjuncția logică, implicația logică, echivalența logică, respectiv, negația logică;
* $S = \{(,)\}$ este mulțimea simbolurilor de punctuație utilizate pentru reprezentarea expresiilor logice.

Se consideră îndeplinite condițiile $V \cap L = \emptyset$, $V \cap S = \emptyset$. Elementele generate pe baza elementelor definite în vocabularul V sunt denumite asamblaje și reprezintă elementele mulțimii $A = (V \cup L \cup S)^*$.

În cadrul limbajului de calcul cu propoziții logice se pot defini, pe baza elementelor din mulțimile V, L și S, expresii logice ce respectă anumite reguli de formare. Se obțin, astfel, expresii simbolice de interes în calculul cu propozițiile logice denumite formule logice, iar mulțimea de formule logice este notată prin $FORM$.

1.1 Definirea conectivelor logice și a formulelor logice

Pentru definirea conectivelor logice utilizate în limbajul logic se consideră mulțimea $\{T, F\}$, elementele ei având semnificațiile logice ale valorilor de adevăr prin $T = adevărat$, respectiv $F = fals$.

[1]Conf. univ. dr., Universitatea din Pitești, doru.constantin@upit.ro
[2]Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, florentina.stefan@upit.ro

Pe mulțimea $\{T, F\}$ se definesc operațiile logice:

$$\begin{aligned}
\neg &: \{T,F\} \to \{T,F\} \text{ (negația logică)}\\
\wedge &: \{T,F\}^2 \to \{T,F\} \text{ (conjuncția logică)}\\
\vee &: \{T,F\}^2 \to \{T,F\} \text{ (disjuncția logică)}\\
\to &: \{T,F\}^2 \to \{T,F\} \text{ (implicația logică)}\\
\leftrightarrow &: \{T,F\}^2 \to \{T,F\} \text{ (echivalența logică)}
\end{aligned}$$

cu următoarele tabele de definire a valorilor de adevăr rezultate asociate fiecărei conective logice pentru toate combinațiile valorilor de adevăr corespunzătoare pentru două propoziții logice ce pot avea valorile T sau F:

$\neg$	T	F
	F	T

$\wedge$	T	F
T	T	F
F	F	F

$\vee$	T	F
T	T	T
F	T	F

$\to$	T	F
T	T	F
F	T	T

$\leftrightarrow$	T	F
T	T	F
F	F	T

Regulile de bună formare pentru structurile simbolice din mulțimea $FORM$ se formulează pe baza noțiunii de SGF (**S**ecvență **G**enerativă **F**ormule).

Definiția 1. *Secvența de asamblaje $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ este* SGF*, dacă pentru orice i, $1 \le i \le n$, este îndeplinită una dintre condițiile:*

(i) $\alpha_i \in V$,
(ii) *există* $j, 1 \le j < i$ *astfel încât* $\alpha_i = (\neg\alpha_j)$,
(iii) *există* j, k, $1 \le j, k < i$ *și există* $\rho \in L \setminus \{\neg\}$ *astfel încât* $\alpha_i = (\alpha_j \rho \alpha_k)$.

Observația 1. Fie α un asamblaj. Atunci, există $n \ge 1$ și $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – SGF astfel încât $\alpha_n = \alpha$ dacă și numai dacă $\alpha \in FORM$.

Exemplul 1. Pentru formula

$$\alpha = ((\neg((\neg a) \vee b)) \leftrightarrow (a \wedge (\neg b)))\,,$$

putem construi următorul SGF:

$$a, b, (\neg a)\,, (\neg b)\,, (a \wedge (\neg b))\,, ((\neg a) \vee b)\,, (\neg((\neg a) \vee b))\,, ((\neg((\neg a) \vee b)) \leftrightarrow (a \wedge (\neg b))) = \alpha.$$

Observația 2. (i) Dacă $\alpha \in V$ atunci secvența α este SGF, deci $V \subset FORM$;

(ii) Dacă $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ este SGF, atunci pentru orice i, $1 \le i \le n$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i$ este SGF. Cu alte cuvinte, toate componentele unui SGF sunt formule logice;

(iii) Delimitarea rezultată prin utilizarea parantezelor pentru structurile simbolice din $FORM \setminus V$ permite identificarea conectivei principale corespunzătoare fiecărei formule care nu este propoziție elementară. Într-adevăr, orice formulă $\alpha \in FORM \setminus V$ se încadrează pe un singur șablon dintre $\alpha = (\neg\beta)$ sau $\alpha = (\beta\rho\gamma)$ cu $\rho \in L \setminus \{\neg\}$. Dacă $\alpha = (\neg\beta)$ atunci conectiva principală a formulei α este "$\neg$" și, respectiv, dacă $\alpha = (\beta\rho\gamma)$ atunci α are conectiva principală "ρ".

1.2 Reprezentarea arborescentă a formulelor logice și funcția de adâncime

Pentru structurile simbolice din mulțimea $FORM$ se poate utiliza și o variantă alternativă de reprezentare și anume cu ajutorul arborilor de structură asociați formulelor logice.

Definiția 2. *Un arborele binar ($T = (V(T), E(T))$, cu $V(T)$ reprezentând mulțimea nodurilor din arbore, iar $E(T)$ reprezentând mulțimea muchiilor din arbore, muchiile fiind precizate prin perechile de noduri definite la nivelul arborelui considerat), direcționat, având rădăcina și vârfurile etichetate cu simboluri din mulțimea $V \cup L$ este* arbore de structură *dacă etichetele vârfurilor sunt definite astfel încât, pentru orice vârf $n \in V(T)$ avem:*

(i) *dacă $od(n) = 0$ atunci $\varphi(n) \in V$;*
(ii) *dacă $od(n) = 1$ atunci $\varphi(n) = \neg$;*
(iii) *dacă $od(n) = 2$ atunci $\varphi(n) \in L \setminus \{\neg\}$*

unde $od(n)$ reprezintă numărul de descendenți direcți ai vârfului n, iar $\varphi(n)$ este eticheta vârfului n.

Observația 3. Fiecare formulă logică din limbajul de calcul cu propoziții logice α poate fi reprezentată printr-un arbore de structură $T(\alpha)$ în acord cu definiția de mai sus. Construcția arborelui de structură $T(\alpha)$ poate fi realizată recursiv utilizând definiția arborelui de structură, precum și observația 2 (*iii*) astfel:

(i) dacă $\alpha \in V$ atunci

$$T(\alpha) : r$$

și $\varphi(r) = \alpha$;

(ii) dacă $\alpha = (\neg\beta)$ atunci

$$T(\alpha) : \begin{array}{c} r \\ \downarrow \\ T(\beta) \end{array},$$

unde $\varphi(r) = \neg$ și $T(\beta)$ este arborele de structură al formulei β;

(iii) dacă $\alpha = (\beta\rho\gamma)$ cu $\rho \in L \setminus \{\neg\}$ atunci

$$T(\alpha) : \begin{array}{ccc} & r & \\ & \swarrow\ \searrow & \\ T(\beta) & & T(\gamma) \end{array},$$

unde $\varphi(r) = \rho$ și $T(\beta), T(\gamma)$ sunt arborii de structură corespunzători formulelor β, respectiv, γ.

Exemplul 2. Se consideră o formulă logică α și se construiește arborele de structură asociat $T(\alpha)$ folosind abservația 3. Se consideră formula $\alpha = ((\neg((\neg a) \vee b)) \leftrightarrow (a \wedge (\neg b)))$.

Deoarece $\alpha = (\beta\rho\gamma)$ cu $\rho = \leftrightarrow, \beta = (\neg((\neg a) \vee b))$ și $\gamma = (a \wedge (\neg b))$ obținem

$$T(\alpha) : \begin{array}{ccc} & r & \\ & \swarrow\ \searrow & \\ T(\beta) & & T(\gamma) \end{array},$$

unde $\varphi(r) = \leftrightarrow$.

Deoarece $\beta = (\neg\beta_1)$, unde $\beta_1 = ((\neg a) \vee b)$, obținem,

$$T(\beta) : \begin{array}{c} n_1 \\ \downarrow \\ T(\beta_1) \end{array},$$

$\varphi(n_1) = \neg$.

Repetând aceleași argumente obținem,

$$T(\beta_1): \begin{array}{ccc} & n_2 & \\ \swarrow & & \searrow \\ T(\beta_2) & & T(\beta_3) \end{array},$$

$\varphi(n_2) = \vee,\ \beta_2 = (\neg a),\ \beta_3 = b.$

$$T(\beta_2): \begin{array}{c} n_3 \\ \downarrow \\ T(\beta_4) \end{array},$$

$\varphi(n_3) = \neg,\ T(\beta_4) : n_4,\ \varphi(n_4) = a.$

$$T(\beta_3): n_5,$$

$\varphi(n_5) = b.$

$$T(\gamma): \begin{array}{ccc} & n_6 & \\ \swarrow & & \searrow \\ T(\gamma_1) & & T(\gamma_2) \end{array},$$

$\varphi(n_6) = \wedge, \gamma_1 = a, \gamma_2 = (\neg b).$

$$T(\gamma_1): n_7,$$

$\varphi(n_7) = a.$

$$T(\gamma_2): \begin{array}{c} n_8 \\ \downarrow \\ T(\gamma_3) \end{array},$$

$\varphi(n_8) = \neg.$

$$T(\gamma_3): n_9,$$

$\varphi(n_9) = b.$

În final se obține arborele de structură:

$$T(\alpha): \begin{array}{ccccc} & & r(\leftrightarrow) & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ & n_1(\neg) & & & n_6(\wedge) \\ & \downarrow & & & \swarrow \quad \searrow \\ & n_2(\vee) & & n_7(a) & & n_8(\neg) \\ & \swarrow & \searrow & & & \downarrow \\ n_3(\neg) & & & n_5(b) & & n_9(b) \\ \downarrow & & & & & \\ n_4(a) & & & & & \end{array}.$$

Pentru o structură simbolică α din mulțimea $FORM$, reprezentarea prin arborele de structură $T(\alpha)$ este unic determinată și permite obținerea unor reprezentări fără utilizarea parantezelor de separare a subexpresiilor logice corespunzătoare formulelor limbajului calculului cu propoziții logice. Aceste reprezentări sunt reprezentarea *poloneză prefixată* și reprezentarea *poloneză prefixată* introduse de către logicianul de origine poloneză J. Lukasiewicz.

Reprezentarea *poloneză prefixată* a unei formule $\alpha \in FORM$ este secvența de etichete corespunzătoare vârfurilor rezultate prin traversarea r-s-d (rădăcină-subarbore stâng-subarbore drept), respectiv reprezentarea *poloneză postfixată* rezultată prin traversarea s-d-r (subarbore stâng-subarbore drept-rădăcină) a arborelui de structură $T(\alpha)$ asociat formulei α.

Exemplul 3. Prin traversarea r-s-d a arborelui de structură al formulei,

$$\alpha = ((\neg((\neg a) \vee b)) \leftrightarrow (a \wedge (\neg b))),$$

rezultă secvența de vârfuri:

$$r, n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9,$$

secvența etichetelor corespunzătoare lor fiind

$$\leftrightarrow \neg \vee \neg ab \wedge a \neg b,$$

deci reprezentarea α_{prefix}. Prin traversarea s-d-r a arborelui de structură rezultă secvența de vârfuri

$$n_4, n_3, n_5, n_2, n_1, n_7, n_9, n_8, n_6, r,$$

secvența etichetelor corespunzătoare lor fiind

$$a \neg b \vee \neg ab \neg \wedge \leftrightarrow,$$

deci reprezentarea $\alpha_{postfix}$.

Complexitatea structurală a formulelor logice se poate exprima prin intermediul valorilor funcției adâncime.

Definiția 3. *Funcția adâncime* $\hbar$*: FORM*$\longrightarrow N$ *este definită prin:* $\alpha \in FORM$*,*

$$\hbar(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } \alpha \in V, \\ 1 + \hbar(\beta), & \text{dacă } \alpha = (\neg\beta), \\ 1 + \max\{\hbar(\beta), \hbar(\gamma)\}, & \text{dacă } \alpha = (\beta\rho\gamma), \rho \in L \setminus \{\neg\}. \end{cases}$$

Exemplul 4. Se va aplica definiția dată pentru formula logică:

$$\alpha = ((\neg((\neg a) \vee b)) \leftrightarrow (a \wedge (\neg b))).$$

Se obține:

$$\hbar(\alpha) = 1 + \max\{\hbar(\beta), \hbar(\gamma)\},$$

unde $\beta = (\neg((\neg a) \vee b))$, $\gamma = (a \wedge (\neg b))$

$$\begin{aligned} \hbar(\beta) &= 1 + \hbar(((\neg a) \vee b)) = 2 + \max\{\hbar((\neg a)), \hbar(b)\} = \\ &= 2 + \max\{1 + \hbar(a), 0\} = 2 + \max\{1, 0\} = 3 \end{aligned}$$

$$\hbar(\gamma) = 1 + \max\{\hbar(a), \hbar((\neg b))\} = 1 + \max\{0, 1 + \hbar(b)\} = 2$$

Rezultă $\hbar(\alpha) = 1 + \max\{\hbar(\beta), \hbar(\gamma)\} = 1 + \max\{3, 2\} = 4$.

Observația 4. Pentru orice $\alpha \in FORM$, valoarea $\hbar(\alpha)$ exprimă înălțimea arborelui de structură $T(\alpha)$ corespunzător formulei α.

2 Sistemul de inferență și deducție logică Gentzen

Definiția 4. *Se numește* secvent *o pereche de mulțimi* (H, Γ) *de formule în care apar numai conectivele logice din mulțimea* $L \setminus \{\leftrightarrow\}$ *. Prima componentă a perechii se numește antecedent, respectiv, cea de a doua componentă se numește succedent. Convențional secventul* (H, Γ) *se reprezintă prin* $H \Longrightarrow \Gamma$*. Demonstrarea logică a unui secvent de forma* (H, Γ) *are semnificația că avem mulțimea de formulele logice din* H *demostrabilă pe baza formulelor logice din mulțimea* Γ*.*

Observația 5. Se va pune în evidență un algoritm de verificare a deducției logice a mulțimii de formule logice H pe baza informațiilor redate de formulele logice din mulțimea Γ prin utilizarea unui set de reguli de inferență logică specifice sistemului de deducție naturală Gentzen.

Observația 6. Pentru conectiva logică de echivalență se utilizează exprimarea semantic echivalentă la nivel logic prin care o formulă logică de forma $(\beta \leftrightarrow \gamma)$ se substituie cu $((\beta \rightarrow \gamma) \wedge (\gamma \rightarrow \beta))$, adică avem: $(\beta \leftrightarrow \gamma) \equiv ((\beta \rightarrow \gamma) \wedge (\gamma \rightarrow \beta))$.

Definiția 5. *Secventul* $H \Longrightarrow \Gamma$ *este secvent axiomă dacă* $H \cap \Gamma \neq \emptyset$*.*

Definiția 6. *Secventul* $H \Longrightarrow \Gamma$ *este secvent încheiat dacă mulțimile componente conțin numai propoziții elementare;* $H \cup \Gamma \subset V$*.*

2.1 Regulile de inferență Gentzen

Definiția 7. *Regulile de inferență Gentzen sunt:*

G1. $\frac{H \Longrightarrow \Gamma \cup \{\alpha\}}{H \cup \{(\neg\alpha)\} \Longrightarrow \Gamma}$ *(*regula negației la stânga*);*

G2. $\frac{H \cup \{\alpha, \beta\} \Longrightarrow \Gamma}{H \cup \{(\alpha \wedge \beta)\} \Longrightarrow \Gamma}$ *(*regula conjuncției la stânga*);*

G3. $\frac{H \cup \{\alpha\} \Longrightarrow \Gamma,\ H \cup \{\beta\} \Longrightarrow \Gamma}{H \cup \{(\alpha \vee \beta)\} \Longrightarrow \Gamma}$ *(*regula disjuncției la stânga*);*

G4. $\frac{H \cup \{\beta\} \Longrightarrow \Gamma,\ H \Longrightarrow \Gamma \cup \{\alpha\}}{H \cup \{(\alpha \rightarrow \beta)\} \Longrightarrow \Gamma}$ *(*regula implicației la stânga*);*

G5. $\frac{H \cup \{\alpha\} \Longrightarrow \Gamma}{H \Longrightarrow \Gamma \cup \{(\neg\alpha)\}}$ *(*regula negației la dreapta*);*

G6. $\frac{H \Longrightarrow \Gamma \cup \{\alpha\},\ H \Longrightarrow \Gamma \cup \{\beta\}}{H \Longrightarrow \Gamma \cup \{(\alpha \wedge \beta)\}}$ *(*regula conjuncției la dreapta*);*

G7. $\frac{H \Longrightarrow \Gamma \cup \{\alpha, \beta\}}{H \Longrightarrow \Gamma \cup \{(\alpha \vee \beta)\}}$ *(*regula disjuncției la dreapta*);*

G8. $\frac{H \cup \{\alpha\} \Longrightarrow \Gamma \cup \{\beta\}}{H \Longrightarrow \Gamma \cup \{(\alpha \rightarrow \beta)\}}$ *(*regula implicației la dreapta*).*

unde H*,* Γ *sunt mulțimi arbitrare de formule;* $\alpha, \beta \in FORM$*.*

Observația 7. Regulile Gentzen definesc modalitățile de descompunere în formule de adâncime mai mică, a formulelor selectate din mulțimile antecedent/succedent. Se observă că pentru o formulă selectată, regula Gentzen aplicabilă există şi este unică și anume este definită de conectiva principală corespunzătoare formulei și de proveniența ei (antecedent respectiv succedent). Regulile $G1, G2, G5, G7$ și $G8$ vor fi referite ca reguli de tipul 1, respectiv regulile $G3, G4$ și $G6$ sunt reguli de tipul 2.

Exemplul 5. Presupunem că formula selectată este

$$\theta = (((\alpha \rightarrow \beta) \vee ((\neg\alpha) \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\beta \vee \gamma))$$

și $S = H \cup \{\theta\} \Longrightarrow \Gamma$. Atunci regula Gentzen aplicabilă este $G4$ și rezultă $\frac{S_1, S_2}{S}$ unde

$$S_1 = H \cup \{(\beta \vee \gamma)\} \Longrightarrow \Gamma,\ S_2 = H \Longrightarrow \Gamma \cup \{((\alpha \rightarrow \beta) \vee ((\neg\alpha) \rightarrow \gamma))\}.$$

Pentru

$$S = H \Longrightarrow \Gamma \cup \{\theta\},$$

dacă θ este formula selectată, atunci regula Gentzen aplicabilă este $G8$ și rezultă

$$\frac{S_1}{S}$$

unde

$$S_1 = H \cup \{((\alpha \to \beta) \vee ((\neg\alpha) \to \gamma))\} \Longrightarrow \Gamma \cup \{(\beta \vee \gamma)\}$$

Definiția 8. *Arborele $T = (V(T), E(T))$ binar, cu rădăcina și vârfurile etichetate cu secvenți este un arbore de deducție, dacă pentru orice $n \in V(T)$, notând cu $\varphi(n)$ secventul etichetă corespunzător vârfului n, avem:*

(i) dacă $od(n) = 1$ și n_1 este unicul succesor al lui n atunci $\frac{\varphi(n_1)}{\varphi(n)}$ este regulă Gentzen;

(ii) dacă $od(n) = 2$ și n_1, n_2 sunt succesorii vârfului n atunci $\frac{\varphi(n_1),\ \varphi(n_2)}{\varphi(n)}$ este regulă Gentzen.

Definiția 9. *Arborele de deducție T este un arbore de demonstrație pentru secventul etichetă a vârfului rădăcină dacă orice vârf terminal are ca etichetă un secvent axiomă.*

Definiția 10. *Arborele de deducție T este un arbore încheiat dacă toate vârfurile terminale au etichete secvenți încheiați.*

Definiția 11. *Arborele de deducție T este un arbore contraexemplu dacă există $n \in V(T)$ astfel încât $\varphi(n)$ este secvent încheiat și nu este secvent axiomă.*

Definiția 12. *Secventul S este demonstrabil, notat $\vdash S$, dacă există T arbore de demonstrație cu r eticheta rădăcinii.*

Exemplul 6. Fie secventul $S = \{(\alpha \to \beta), ((\neg\alpha) \to \gamma)\} \Longrightarrow \{(\beta \vee \gamma)\}$.

Arborele T reprezentat în figura următoare este un arbore de deducție cu r eticheta radăcinii. Deoarece vârfurile terminale sunt n_5, n_7, n_{10}, n_{11} și au etichetele secvenți axiomă rezultă $\vdash S$.

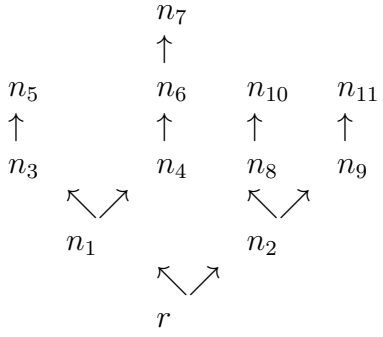


Fig. 1

Secvenții etichete ale vârfurilor arborelui T sunt:

$$\begin{aligned}
&\varphi(r) = S,\\
&\varphi(n_1) = \{\beta, ((\neg\alpha) \to \gamma)\} \Longrightarrow \{(\beta \vee \gamma)\},\\
&\varphi(n_2) = \{((\neg\alpha) \to \gamma)\} \Longrightarrow \{\alpha, (\beta \vee \gamma)\},\\
&\varphi(n_3) = \{\beta, \gamma\} \Longrightarrow \{(\beta \vee \gamma)\},\\
&\varphi(n_4) = \{\beta\} \Longrightarrow \{(\neg\alpha), (\beta \vee \gamma)\},\\
&\varphi(n_5) = \{\beta, \gamma\} \Longrightarrow \{\beta, \gamma\},\\
&\varphi(n_6) = \{\alpha, \beta\} \Longrightarrow \{(\beta \vee \gamma)\},\\
&\varphi(n_7) = \{\alpha, \beta\} \Longrightarrow \{\beta, \gamma\},\\
&\varphi(n_8) = \{\gamma\} \Longrightarrow \{\alpha, (\beta \vee \gamma)\},\\
&\varphi(n_9) = \emptyset \Longrightarrow \{(\neg\alpha), \alpha, (\beta \vee \gamma)\},\\
&\varphi(n_{10}) = \{\gamma\} \Longrightarrow \{\alpha, \beta, \gamma\},\\
&\varphi(n_{11}) = \{\alpha\} \Longrightarrow \{\alpha, (\beta \vee \gamma)\}.
\end{aligned}$$

Pentru construirea unui arbore de demonstrație asociat unui secvent dat S se poate utiliza algoritmul de deducție logică bazat pe regulile de inferență Gentzen.

2.2 Algoritmul de deducție logică bazat pe regulile de inferență Gentzen

Deducție Logică Gentzen $DLG(S)$
Inițializări: Arborele curent $T = (V(T), E(T))$, cu $V(T) = \{r\}$, $\varphi(r) = S$, $E(T) = \emptyset$.
Repeat

P1: Se selectează un vârf n aflat pe frontiera arborelui curent astfel încât $\varphi(n)$ nu este secvent încheiat și $\varphi(n)$ nu este secvent axiomă

P2: Se selectează o formulă $\alpha \notin V$ din antecedentul/succedentul secventului $\varphi(n)$ și se identifică regula Gentzen (notată R_G) aplicabilă formulei α

P3: (i) Dacă regula R_G este de tipul 1, reprezentată prin $\frac{S_1}{\varphi(n)}$ atunci se reactualizează arborele T prin

$$T \leftarrow (V(T) \cup \{n_1\}, E(T) \cup \{nn_1\})$$

unde

$$n_1 \notin V(T), \varphi(n_1) = S_1$$

(ii) Dacă regula R_G este de tipul 2, reprezentată prin $\frac{S_1, S_2}{\varphi(n)}$ atunci se reactualizează arborele T prin

$$T \leftarrow (V(T) \cup \{n_1, n_2\}, E(T) \cup \{nn_1, nn_2\})$$

unde

$$n_1, n_2 \notin V(T), \varphi(n_1) = S_1, \varphi(n_2) = S_2$$

Until *(există cel puțin un secvent încheiat care nu este axiomă)* sau *(toate vârfurile aflate pe frontiera arborelui curent generat au ca etichete secvenți axiomă)*
If *(există cel puțin un secvent încheiat care nu este axiomă)* **Then** write*(Secventul S nu este demonstrabil)*
If *(toate vârfurile aflate pe frontiera arborelui curent generat au ca etichete secvenți axiomă)* **Then** write*(Secventul S este demonstrabil)*

Observația 8. Pentru efectuarea pasului $P1$ este necesară verificarea etichetelor vârfurilor aflate pe frontiera arborelui curent generat (adică etichetele vârfurile terminale sau frunzele din arborele T). Dacă există cel puțin un secvent încheiat care nu este axiomă atunci se decide terminarea procesului de reactualizare a arborelui T cu decizia *Secventul S nu este demonstrabil.* Dacă toate vârfurile aflate pe frontiera arborelui curent generat au ca etichete secvenți axiomă, atunci arborele curent generat este un arbore de demonstrație pentru secventul inițial S și în acest caz procesul de reactualizare se încheie cu decizia *Secventul S este secvent demonstrabil* și astfel se deduce demonstrabilitatea mulțimii de formule din succedent (Γ) pe baza mulțimii de formule din antecedent (H).

Exemplul 7. Algoritmul de deducție logică Gentzen se aplică pentru secventul de la exemplul 6. Se notează cu ∂T frontiera arborelui T.
Inițial avem $T = (\{r\}, \emptyset), iar\ \varphi(r) = \{(\alpha \to \beta), ((\neg\alpha) \to \gamma)\} \Longrightarrow \{(\beta \vee \gamma)\}$.

Etapele de reactualizare a arborelui T prin aplicarea algoritmului de deducție logică bazat pe regulile de inferență Gentzen sunt:

1. $\partial T = \{r\}, n = r$; formula selectată $(\alpha \to \beta)$; se aplică regula G4;

$$T: \quad \begin{array}{ccc} n_1 & & n_2 \\ & \nwarrow\!\nearrow & \\ & r & \end{array}$$

   $\varphi(n_1) = \{\beta, ((\neg\alpha) \to \gamma)\} \Longrightarrow \{(\beta \vee \gamma)\},\ \varphi(n_2) = \{((\neg\alpha) \to \gamma)\} \Longrightarrow \{\alpha, (\beta \vee \gamma)\}$.
2. $\partial T = \{n_1, n_2\}; n = n_1$; formula selectată $((\neg\alpha) \to \gamma)$; se aplică regula G4;

$$T: \quad \begin{array}{ccccc} n_3 & & n_4 & & \\ & \nwarrow\!\nearrow & & & \\ n_1 & & & & n_2 \\ & & & \nwarrow\!\nearrow & \\ & & r & & \end{array}$$

   $\varphi(n_3) = \{\beta, \gamma\} \Longrightarrow \{(\beta \vee \gamma)\},\ \varphi(n_4) = \{\beta\} \Longrightarrow \{(\neg\alpha), (\beta \vee \gamma)\}$.
3. $\partial T = \{n_3, n_4, n_2\}$; $n = n_3$; formula selectată $(\beta \vee \gamma)$; se aplică regula G7;

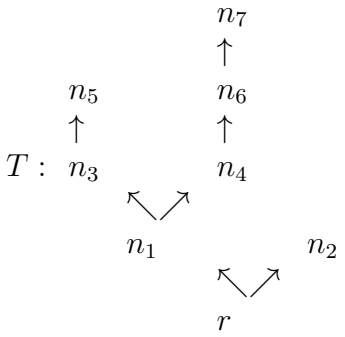
$$T: \quad \begin{array}{ccccc} n_5 & & & & \\ \uparrow & & & & \\ n_3 & & n_4 & & \\ & \nwarrow\!\nearrow & & & \\ n_1 & & & & n_2 \\ & & & \nwarrow\!\nearrow & \\ & & r & & \end{array}$$

   $\varphi(n_5) = \{\beta, \gamma\} \Longrightarrow \{\beta, \gamma\}$ este secvent axiomă.
4. $\partial T = \{n_5, n_4, n_2\}$; $n = n_4$; formula selectată $(\neg\alpha)$; se aplică regula G5;

$$T: \quad \begin{array}{ccccc} n_5 & & n_6 & & \\ \uparrow & & \uparrow & & \\ n_3 & & n_4 & & \\ & \nwarrow\!\nearrow & & & \\ n_1 & & & & n_2 \\ & & & \nwarrow\!\nearrow & \\ & & r & & \end{array}$$

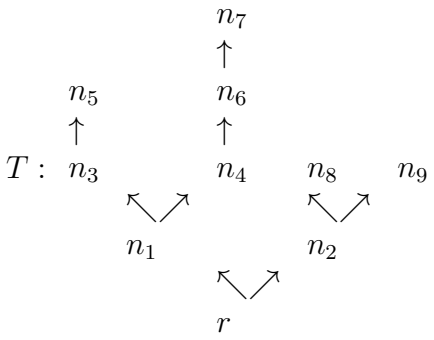
   $\varphi(n_6) = \{\alpha, \beta\} \Longrightarrow \{(\beta \vee \gamma)\}$.

5. $\partial T = \{n_5, n_6, n_2\}$; $n = n_6$; formula selectată $(\beta \vee \gamma)$; se aplică regula G7;



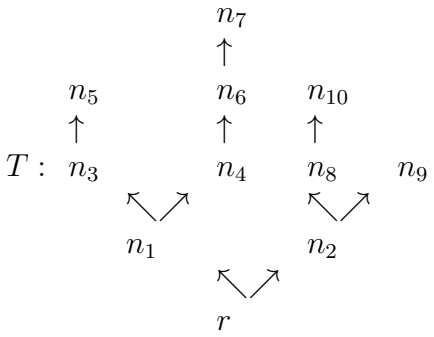
$\varphi(n_7) = \{\alpha, \beta\} \Longrightarrow \{\beta, \gamma\}$ este secvent axiomă.

6. $\partial T = \{n_5, n_7, n_2\}$; $n = n_2$; formula selectată $((\neg\alpha) \to \gamma)$; se aplică regula G4;



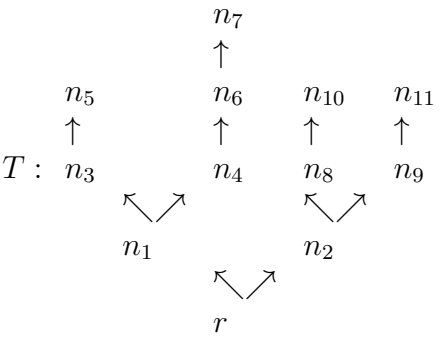
$\varphi(n_8) = \{\gamma\} \Longrightarrow \{\alpha, (\beta \vee \gamma)\}$, $\varphi(n_9) = \emptyset \Longrightarrow \{(\neg\alpha), \alpha, (\beta \vee \gamma)\}$.

7. $\partial T = \{n_5, n_7, n_8, n_9\}$; $n = n_8$; formula selectată $(\beta \vee \gamma)$; se aplică regula G7;



$\varphi(n_{10}) = \{\gamma\} \Longrightarrow \{\alpha, \beta, \gamma\}$ este secvent axiomă.

8. $\partial T = \{n_5, n_7, n_{10}, n_9\}$; $n = n_9$; formula selectată $(\neg\alpha)$; se aplică regula G5;



$\varphi(n_{11}) = \{\alpha\} \Longrightarrow \{\alpha, (\beta \vee \gamma)\}$ este secvent axiomă.

9. $\partial T = \{n_5, n_7, n_{10}, n_{11}\}$; toate vârfurile aflate pe frontiera arborelui curent generat au ca etichete secvenți axiomă, deci procesul de reactualizare a arborelui T se încheie cu decizia *Secventul inițial S este secvent demonstrabil.*

Concluzii

Lucrarea prezintă pe lângă elementele de bază ale unui limbaj de calcul cu propoziții logice cu definirea conectivelor logice și a modului de reprezentare și o modalitate de determinare a demostrabilității unei mulțimi de formule logice pe baza unei alte mulțimi logice prin utilizarea regulilor de inferență Gentzen. Algoritmul ce stabilește deducția logică a unui set de formule logice în funcție de informații logice cunoscute este bazat pe regulile de inferență Gentzen. Prin descrierea teoretică a elementelor de logică matematică și aplicarea unui raționament logic algoritmic cu aplicații uzuale privind demonstrarea logică automată se arată utilitatea și caracterul aplicativ în diverse domenii ce referă reprezentarea cunoștințelor într-un limbaj logic.

Bibliografie

[1] J.L. Bell, M. Machover, *A Course in Mathematical Logic*, North-Holland, 1997.

[2] M. Ben-Ari, *Mathematical Logic for Computer Science*, Springer Verlag, 2001.

[3] J. Bessie, S. Glennan, *Elements of Deductive Inference: An Introduction to Symbolic Logic*, Wadsworth Publishing Company, 1999.

[4] C.M. Bishop, *Neural Network for Pattern Recognition*, Clarendon Press, 1995.

[5] A. Church, *Introduction to Mathematical Logic*, Princeton University Press, 1996.

[6] A. Cichocki, R. Unbehauen, *Neural Networks for Signal Processing and Optimization*, Wiley, 1994.

[7] T.M. Cover, J.A. Thomas, *Elements of Information Theory*, Wiley, 1991.

[8] K.I. Diamantaras, S.Y. Kung, *Principal Component Neural Networks: Theory and Applications*, Wiley, 1996.

[9] H.D. Ebbinghauss, J. Flum, W. Thomas, *Mathematical Logic*, Springer Verlag, 1994.

[10] M. Fitting, *First-Order Logic and Automated Theorem Proving*, Springer Verlag, 1996.

[11] T. Foster, *Logic, Computation and Set Theory*, CRC Press, 2002.

[12] M. Gabbay, C.J. Hogger, J.A. Robinson, *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*, Oxford University Press, 1998.

[13] J.H. Gallier, *Logic for Computer Science: Foundations of Automatic Theorem Proving*, Harper&Row, 2003.

[14] W. Gardner, *Introduction to Random Processes with Applications to Signal and Systems*, Macmillan, 1986.

[15] R. Gonzalez, P. Wintz, *Digital Image Processing*, Addison-Wisley, 1987.

[16] M. Girolami, *Self-Organising Neural Networks - Independent Component Analysis and Blind Source Separation*, Springer Verlag, 1999.

[17] A. Hyvärinen, J. Karhunen, E. Oja, *Independent Component Analysis*, John Wiley, 2001.

[18] I.T. Jolliffe, *Principal Component Analysis*, Springer-Verlag New York, 2002.

[19] S. Kay, *Modern Spectral Estimation: Theory and Application*, Prentince Hall, 1988.

[20] T. Kohonen, *Self-Organizing Maps*, Springer, 1995.

[21] T.W. Lee, *Independent Component Analysis - Theory and Applications*, Kluwer, 1998.

[22] Z. Manna, R. Waldinger, J. Manna, *The Logical Basis for Computer Programming: Deductive Reasoning*, Addison-Wesley, 1991.

[23] E. Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic, Fourth Edition*, CRC Press, 1997.

[24] A. Oppenheim, R. Schafer, *Discrete-Time Signal Processing*, Prentince Hall, 1989.

[25] S. Russell, P. Norvig, *Artificial Intelligence. A Modern Approach*, Prentice Hall, 1995.

[26] R.M. Smullyan, *First-Order Logic*, Dover Publications, 1995.

[27] L. State, *Elemente de logica matematica și demonstrarea automata a teoremelor*, Univ. București, 1989.

[29] C. Therrien, *Discrete Random Signals and Statistical Signal Processing*, Prentince Hall, 1992.

[30] L. Zhongwan, *Mathematical Logic for Computer Science*, World Scientific Pub. Co., 1998.

Prezentarea Concursului Dräexlmaier IT Day, Ediția I, 11 ianuarie 2019

Mihai-Radu Găman [1] *și Maria Miroiu* [2]

Departamentul **IT Center Pitești** din cadrul companiei **DRÄXLMAIER Group** a organizat în ianuarie 2019 **prima ediție a concursului "Dräxlmaier IT Day"**. Au participat la concurs studenți de la domeniul de licență Informatică din cadrul Facultății de Științe, Educație Fizică și Informatică, Universitatea din Pitești.

Data limită de depunere a proiectelor a fost 11 ianuarie 2019, iar prezentarea proiectelor s-a desfășurat pe 17 ianuarie 2019. S-au acceptat ca limbaje de programare: C#, Java, Cobol, PHP.

Premiile oferite: premiul I a constat dintr-un voucher de cumpărături pe platforma Emag în valoare de 300 de euro și a fost câștigat de studentul Staicu Mircea Adrian de la Informatică, anul 2, premiul al II-lea a constat dintr-un voucher de cumpărături pe platforma Emag în valoare de 150 de euro și a fost câștigat de studentul Goșoiu Cosmin Iulian de la Informatică, anul 1, iar premiul al III-lea a constat dintr-un voucher de cumpărături pe platforma Emag în valoare de 50 de euro și a fost câștigat de studentul Roceanu Mihai de la Informatică, anul 1. Juriul a fost compus din mai mulți specialiști din cadrul IT Center Pitești, Draexlmaier Group.

Scopul principal a constat în **implementarea unei aplicații prin intermediul căreia utilizatorii să poată vizualiza legăturile între proceduri, programe, interfețe grafice și leadcards, respectiv să poată genera un raport PDF cu aceste date**. Baza de date consta din fișiere XML și conținea informații despre: programe, interfețe grafice, programe și leadcards. Acesta se luau în considerare ca date de intrare și se administrau de către beneficiarul aplicației. Toată documentația pentru realizarea proiectelor concursului "Dräxlmaier IT Day" a fost realizată de Mihai Găman, Head of Delivery Supply Chain Management, IT Center Pitești, Draexlmaier Group.

1 Model entități

Informațiilor stocate în sistem (fișiere XML) sunt asociate următoarelor entități: <**programe**>, <**procedure**>, <**interfete grafice**> și <**leadcards**>.

Diagrama conceptuală a acestor entități și relațiile dintre ele sunt descrise în imaginea următoare.

[1]Head of Delivery Supply Chain Management, IT Center Pitești, Draexlmaier Group, mihai.gaman@draexlmaier.com

[2]Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, maria.miroiu@gmail.com

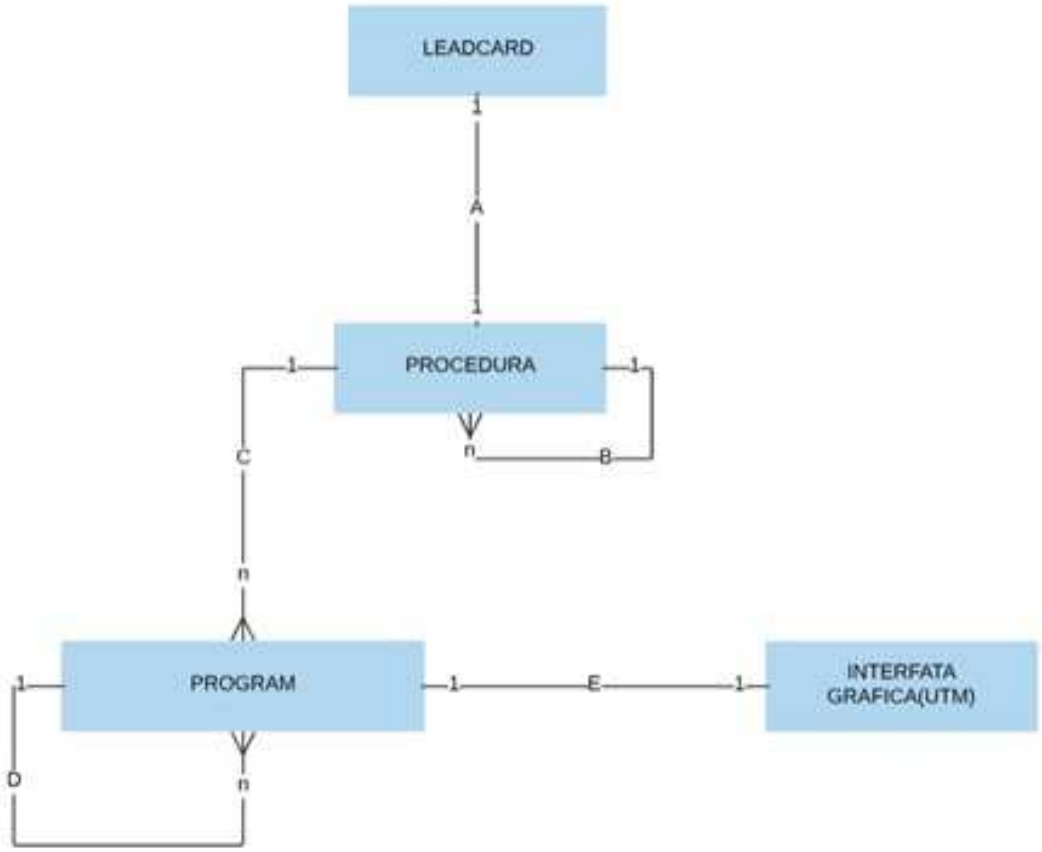


Figura 1. Relațiile între entități

2 Descrierea relațiilor

A – un <leadcard> lansează spre execuție o <procedura>
B – o <procedura> poate lansa spre execuție o altă <procedura>
C – o <procedura> poate lansa spre execuție unul sau mai multe <programe>
D – un <program> poate să execute alte <programe> (subprograme)
E – în spatele unei <interfete grafice (utm)> se află un <program>

Entitatea <procedura>

Este o înșiruire de comenzi care se execută secvențial. O procedură poate conține un call către un program sau mai multe.

Id	Text	Obligatoriu	Indentificatorul va fi o cheie naturală, format din numele procedurii (eg. B.AB0001)
Account	Text	Obligatoriu	
Programe	Listă de elemente de tip <program>	Optional	O procedură poate conține execuția unui program sau mai multe
Procedure	Listă de elemente de tip <procedura>	Optional	O procedură poate conține call-uri de proceduri la rândul lor

Entitatea <program>

Un program este un fișier text ce conține cod sursă care poate fi executată (după compilare și alte operații specifice). Acesta, la rândul lui, poate executa un alt program.

Id	Text	Obligatoriu	Indentificatorul va fi o cheie naturală, format din primele 6 caractere ale indentificatorului programului (eg. AB1234)
Type	Text	Obligatoriu	Poate avea două valori BATCH sau UTM
Path	Text	Opțional	Calea către locația sursei în proiect
Programe	Listă de elemente de tip <program>	Opțional	Un program poate chema pentru executare un alt program (numit și subprogram) sau mai multe

Entitatea <interfata_grafica>

Aceasta entitate desemnează o mască grafică ce poate fi accesată de utilizator. În spate, aceasta este administrată de un program și numai unul.

Atribut	Tip	Validare	Descriere
Id	Text	Obligatoriu	4 caractere care indentifică unic o mască grafică
Description	Text	Optional	50 de caractere care descriu interfața curentă
Id Program	Text	Obligatoriu	Id-ul unui program care procesează interfața curentă

Entitatea <leadcard>

Această entitate se referă la o funcționalitate a systemului ERP ce face posibilă startarea unei proceduri de către utilizator.

Atribut	Tip	Validare	Descriere
Id	Text	Obligatoriu	3 sau 5 caractere care indentifică unic o entitate de tip leadcard (o aplicație ce permite startarea unei procedure de către utilizator)
Description	Text	Optional	50 de caractere care descriu entitatea curentă
Id Procedura	Text	Obligatoriu	Id-ul unui proceduri care este startată de leadcard-ul curent

3 Cerințe funcționale

Proiectul presupune realizarea unei aplicații grafice cu următoarele funcționalități.

Setarea surselor de date

- citirea datelor si relațiilor din fișiere XML (structura și exemple sunt în Anexă);
- fișierele ce reprezintă sursa de date pot fi configurate într-un fișier de tip .ini file, astfel încât selecția datelor nu va trebui făcută la fiecare rulare, ci o singura dată, la prima rulare.

Afișarea entităților și relațiilor sub formă de grafuri

- Se vor afișa toate relațiile sub forma unui graf sau mai multora, în funcție de interconectarea datelor. Graful / grafurile vor fi orientate (direcția este de tipul relațiilor descrise în Figura 1. Relațiile dintre entități). Pentru a deosebi entitățile, aceste vor fi evidentiate folosindu-se culori diferite (ROSU <leadcard>, ALBASTRU <procedura>, VERDE <program>, VIOLET <interfata grafica>).

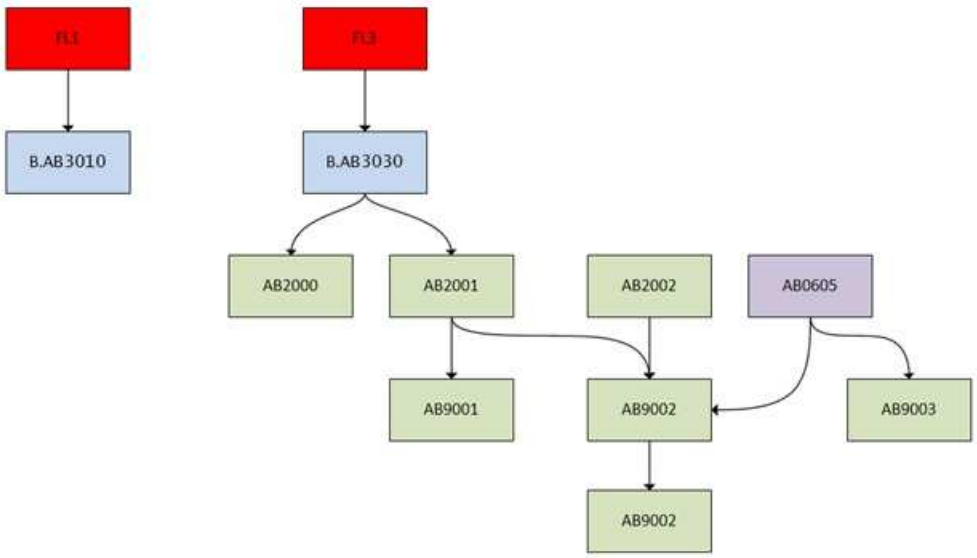


Figura 2. Exemplu de afișare a tuturor grafurilor corespunzătoare entităților date

Căutare

- o funcție de căutare care presupune alegerea unui tip de entitate și valoarea ei (se recomandă folosirea unei funcții de live search); în urma căutării, se evidențiază și afișează toate drumurile elementare din graf care trec și prin nodul corespunzător elementului dat. De exemplu, prin căutarea unui <program> cu valoarea AB2001, aplicația să afișeze o imagine precum următoarea (să evidențieze cu roșu toate drumurile elementare ce conțin programul AB2001).

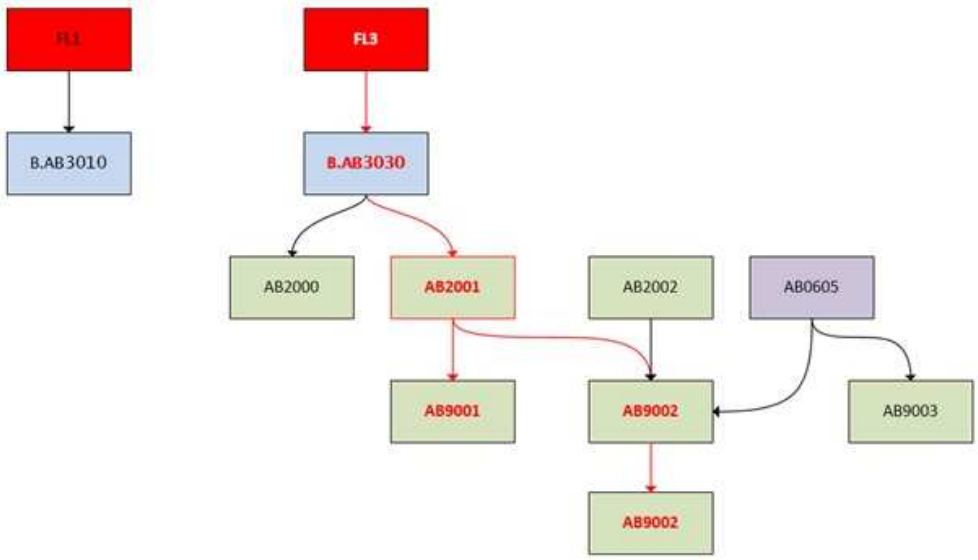


Figura 3. Exemplu de afișare a tuturor drumurilor elementare ce conțin un element căutat

Generare raport în format PDF

Aplicația va trebui să aibă funcționalitatea de a genera un raport PDF ce conține 4 capitole, câte un capitol corespunzător fiecărei entități descrise anterior.

Capitolul "Interfețe grafice" În acest capitol, se prezintă toate elementele de tip <interfata grafica>. Se va afișa descrierea – valoarea atributului "description" și programul corespunzător interfeței grafice. A se vedea exemplul următor, bazat pe datele din Anexă.

601
Descriere : masca pentru administrarea BOM
Program: **AB0601**
604
Descriere : istoric modificari BOM
Program: **AB0604**
605
Descriere : drepturi administrare BOM
Program: **AB0605**

Capitolul "Leadcard-uri" În acest capitol, se prezintă prezentate toate elementele de tip <leadcards>. Se afișează descrierea – valoarea atributului "description" și procedura corespunzător leadcard-ului. A se vedea exemplul următor, bazat pe datele din Anexă.

FL3
Descriere : startare procedura import date in APP1
Procedura: **B.AB3030**
FL1
Descriere : startare procedura import date in APP2
Procedura: **B.AB3010**
FL5
Descriere : startare procedura import date in APP3
Procedura: **B.AB3010**
00001
Descriere : startare procedura creare raport 1
Procedura: **B.AB5010**
00002
Descriere : startare procedura creare raport 2
Procedura: **B.AB5020**

Capitolul "Proceduri" În acest capitol, se prezintă toate elementele de tip <procedura>. Se afișează toate elementele de tip <program> și toate elementele de tip <procedura>. A se vedea exemplul următor, bazat pe datele din Anexă.

B.AB3030
Programe: **AB2000**
AB2000
B.AB3010
Programe: **AB2000**
Proceuri: **B.AB3030**
B.FL3010
Programe: **AB2001**

Capitolul "Programe" În acest capitol, se prezintă toate elementele de tip <program>. Se afișează toate elementele de tip <program> care sunt copii ale elementului curent, sub <Programme chemate>, dar și toate elementele de tip <program>, care sunt părinți pentru elemente de tip program cu același id ca cel curent. A se vedea exemplul următor, bazat pe datele din Anexă.

4 Cerințe tehnice

- Aplicația realizată va trebui să fie dezvoltată în Java sau .NET.
- În cazul utilizării tehnologiei Java, pentru afișarea grafurilor se recomandă folosirea librăriei JUNG (https://en.wikipedia.org/wiki/JUNG).
- În cazul utilizării tehnologiei Java, pentru raportul PDF se recomandă folosirea librăriei DITA (https://en.wikipedia.org/wiki/Darwin_Information_Typing_Architecture)
- În cazul utilizării tehnologiei .NET, pentru reprezentarea grafurilor se recomandă utilizarea librăriei: GoXam for WPF (https://www.nwoods.com/products/goxam/)
- În cazul utilizării tehnologiei .NET, pentru crearea raportului PDF se recomandă utilizarea librăriei PDFsharp (http://www.pdfsharp.net/?AspxAutoDetectCookieSupport=1)

Anexă

În continuare sunt exemple pentru fiecare dintre entitățile definite mai sus.

proceduri.xml

```
<root>
  <procedure id="B.AB3030" account="$PR">
    <programReference programId="AB2000"/>
    <programReference programId="AB2001"/>
  </procedure>
  <procedure id="B.AB3010" account="$PR">
    <programReference programId="AB2002"/>
    <procedureReference procedureId="B.AB3030"/>
  </procedure>
  <procedure id="B.FL3010" account="$PRUS">
    <programReference programId="AB2001"/>
  </procedure>
</root>
```

leadcards.xml

```
<root>
  <leadcard id="FL3" description="startare procedura import date
     in APP1" procedureId="B.AB3030"/>
  <leadcard id="FL1" description="startare procedura import date
     in APP2" procedureId="B.AB3010"/>
  <leadcard id="FL5" description="startare procedura import date
     in APP3" procedureId="B.AB3010"/>
  <leadcard id="00001" description="startare procedura creare
     raport 1" procedureId="B.AB5010"/>
  <leadcard id="00002" description="startare procedura creare
     raport 2" procedureId="B.AB5020"/>
</root>
```

interfete_grafice.xml

```
<root>
  <interfataGrafica id="0601" description="masca pentru
     administrarea BOM" programId="AB0601"/>
  <interfataGrafica id="0604" description="istoric modificari BOM
     " programId="AB0604"/>
  <interfataGrafica id="0605" description="drepturi administrare
     BOM" programId="AB0605"/>
</root>
```

programe.xml

```
<root>
  <!-- batch programs -->
  <program id="AB2000" type="BATCH" path="Global\src\AB200000.CBL
     "/>
```

```
  <program id="AB2001" type="BATCH" path="Global\src\AB200100.CBL
     ">
    <programReference programId="AB9001"/>
    <programReference programId="AB9002"/>
  </program>
  <program id="AB2002" type="BATCH" path="Global\src\AB200200.CBL
     ">
    <programReference programId="AB9002"/>
  </program>
  <!-- subprograms -->
  <program id="AB9001" type="BATCH" path="Global\src\AB900100.CBL
     "/>
  <program id="AB9002" type="BATCH" path="Global\src\AB900200.CBL
     "/>
  <program id="AB9003" type="BATCH" path="Global\src\AB900300.CBL
     ">
    <programReference programId="AB9004"/>
  </program>
  <program id="AB9004" type="BATCH" path="Global\src\AB900400.CBL
     "/>
  <!-- UTM GUI programms -->
  <program id="AB0601" type="UTM" path="UTM\src\AB060100.IFG"/>
  <program id="AB0602" type="UTM" path="UTM\src\AB060200.IFG"/>
  <program id="AB0603" type="UTM" path="UTM\src\AB060300.IFG"/>
  <program id="AB0604" type="UTM" path="UTM\src\AB060400.IFG">
    <programReference programId="AB9002"/>
  </program>
  <program id="AB0605" type="UTM" path="UTM\src\AB060500.FPL">
    <programReference programId="AB9002"/>
        <programReference programId="AB9003"/>
  </program>
</root>
```

RUBRICA DE ROBOTICĂ

Programarea roboților care folosesc un sistem de rulare Mecanum

Gabriel-Ciprian Stanciu [1]

Introducere

Robotica este unul dintre cele mai dinamice domenii ale tehnologiei aplicate, care îmbină electronica, mecanica și programarea, și are aplicații atât în mediul industrial cât și în cel educațional. Datorită recentei explozii a sale în popularitate pentru public larg, este esențial ca orice model de robot să fie cât mai eficient atât din punctul de vedere al mecanismelor, cât și al programării. Pentru aplicații precum roboți transportori sau care au nevoie de o mare precizie în mișcare, roțile omnidirecționale precum cele Mecanum sunt o soluție mai bună față de roțile clasice.

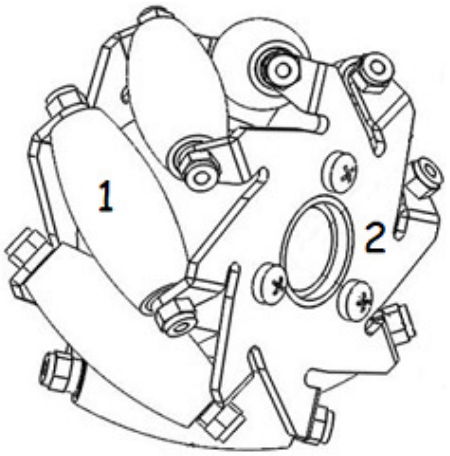


Fig. 1: Desen schematic al unei roți Mecanum
1 – rolele mobile
2 – ,,cadrul" roții, fixat pe axul motorului

Despre roțile Mecanum

Acest tip de roți gândite în 1973 și numite uneori și ,,roată Ilon" după numele creatorului lor pot mișca un vehicul în orice direcție datorită rolelor atașate circumferinței roții, care fac ca forțele de tracțiune să fie aplicate la un unghi de 45° față de planul roții.

Mișcarea tuturor celor patru roți în aceeași direcție produce o mișcare în față sau în spate, mișcarea roților pe o parte în sens invers celor de pe cealaltă parte produce rotația robotului, iar mișcând roțile de pe o diagonală invers față de cele de pe cealaltă diagonala produce mișcarea laterală a robotului.

Combinând aceste mișcări ale putem deplasa robotul în orice direcție, cu orice viteză și rotație, lucru foarte util în manevrarea sa autonomă sau controlată de utilizator.

[1]Colegiul Național ,,Radu Greceanu", Slatina, stanciu.gabriel.ciprian@gmail.com

Programarea

Programarea acestui tip de sistem de rulare este mai complexă decât a unor roți simple, deoarece modul special de funcționare nu ne mai permite să folosim sisteme de control precum cel tanc (puteri separate aplicate fiecărei laterale a robotului). De asemenea, și robotul trebuie să fie gândit în jurul acestor roți, întrucât un robot cu o distribuție inegală a greutății va provoca o diferență în tracțiunea roților, astfel modificându-se rotația fiecărei roți și pierzându-se efectul Mecanum.

Există două metode de control pentru acest sistem de roți: prin coordonate carteziene (X, Y, rotație – folosit atunci când se controlează folosind un joystick), sau prin coordonate polare (viteză deplasare, unghi direcție, viteză rotație).

Vom explica modul de programare al roților folosind coordonate carteziene, iar conversia de la coordonate polare la coordonate carteziene dacă este necesară va fi făcută prin operații matematice.

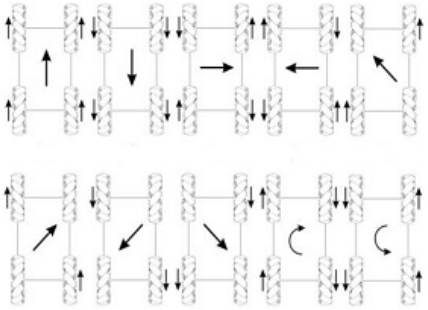


Fig. 2: Modul de rotire al roților împreună cu direcția robotului

Având în vedere modul de funcționare al roților Mecanum, ne vom folosi de graficul din dreapta pentru a crea un algoritm care va converti direcțiile furnizate de joystick (mișcare dorită a robotului) în putere pentru roți.

Pentru acest exemplu, am considerat că folosim un joystick pentru a controla robotul, maneta din stânga reprezentând mișcarea față-spate (axa verticală Y) și laterală (axa orizontală Z), iar maneta din dreapta reprezentând mișcarea de rotație (axa orizontală a manetei fiind axa Z). În plus, am considerat că direcția de mers a motoarelor a fost calibrată deja în program (direcția motoarelor de pe o parte inversată).

Puterile care vor fi transmise la motor vor fi următoarele:

front_left_pwr = + x + y + z;

front_right_pwr = + x - y - z;

back_left_pwr = + x - y + z;

back_right_pwr = + x + y - z;

Atunci când vom crea un program autonom pentru robot, este indicat să folosim sistemul de coordonate polar, și nu cel cartezian, deoarece nu gândim efectiv în viteze separate pentru axele X, Y sau Z, ci doar în viteză și unghi de deplasare și viteză de rotație.

Conversia coordonatelor se va face astfel:

x = viteza_deplasare * cosinus(directie_radiani)

y = viteza_deplasare * sinus (directie_radiani)

z = viteza_rotatie

Următorul exemplu este scrisă în limbajul Java, pentru roboți care folosesc sistemul de control specific competițiilor *FirstTechChallenge*. Vom include doar conținutul clasei mecanum.

```
1  publicclassmecanum{
2      privatedoublevitezaX=0;
3      privatedoublevitezaY=0;
4      privatedoublevitezaZ=0;
5
6      privateDcMotorfront\_left=null;
7      privateDcMotorfront\_right=null;
8      privateDcMotorback\_left=null;
9      privateDcMotorback\_right=null;
10         publicmecanum(DcMotor fl,DcMotor fr,DcMotor bl,DcMotor br){
11             front\_left=fl;
12             front\_right=fr;
13             back\_left= bl;
14             back\_right=br;
15         }
16
17         privatedoublenormalizeaza(double x){
18             returnMath.min(1,Math.max(-1, x));
19         }
20
21         publicvoidputereMotoare(){
22             front\_left.setPower(x+y+z);
23             front\_right.setPower(x-y-z);
24             back\_left.setPower(x-y+z);
25             back\_right.setPower(x+y-z);
26         }
27
28         publicvoidseteazaCartezian(double x,double y,double z){
29             vitezaX= x;
30             vitezaY= y;
31             vitezaZ= z;
32         }
33
34         publicvoidseteazaPolar(double deplasare,double unghi,double rotatie){
35             vitezaX= deplasare *Math.cos(unghi);
36             vitezaY= deplasare *Math.sin(unghi);
37             vitezaZ=normalizeaza(rotatie);
38         }
39   }
```

Concluzii

Acest exemplu poate avea nevoie de modificări la semnele axelor de coordonate pentru a corespunde fiecărui robot în parte. Diferențele în orientarea motoarelor sau în pozițiile limită ale manetelor joystick-urilor pot duce la un tabel de puteri diferit și, implicit, la cod ușor schimbat. De asemenea, acest cod poate fi îmbunătățit în funcție de necesitățile proiectului, de exemplu prin adăugarea unui giroscop pentru rotații precise în modul autonom.

Avantajul roților Mecanum față de celelalte tipuri de roți constă în manevrabilitatea lor, robotul putându-se deplasa instantaneu în orice direcție, fără a roti sau deplasa robotul în prealabil. Se bucură de o popularitate mare la competițiile de robotică precum FIRST Tech-Challenge, FIRST RoboticsCompetition, VEX RoboticsCompetition, mai ales în anii în care roboții nu au nevoie de o putere mare de împingere.

Bibliografie

[1] http://files.andymark.com/MecanumWheelSpecSheet.pdf

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Mecanum_wheel

[3] https://wpilib.screenstepslive.com/s/currentCS/m/java/l/599704-driving-a-robot-using-mecanum-drive

[4] http://team9960.org/mecanum-drive-prototype-1-manual-drive-software/

[5] QianJia, Mulan Wang, ShuqingLiu, *Research and development of mecanum-wheeled omni-directional mobile robot implemented by multiple control methods*, 2016 23rd International Conference on MechatronicsandMachine Vision in Practice (M2VIP).

PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU EXAMENE

Teste pentru examenul de Evaluare Națională

Testul 1

Maria-Crina Diaconu [1]

SUBIECTUL I

1. Rezultatul calculului $\frac{1}{\sqrt{3}+2} - \sqrt{7+4\sqrt{3}}$ este egal cu ....
2. Dacă $\frac{a+b}{b} = 3$, atunci valoarea raportului $\frac{b}{a}$ este egal cu ....
3. Scrisă sub formă de interval mulțimea soluțiilor inecuației $\frac{x-3}{(x+5)^2} < 0$ este egală cu ....
4. Un cub $MATEINFO$ are lungimea diagonalei egală cu $4\sqrt{3}$ cm. Aria dreptunghiului $MTFI$ este egală cu ... cm^2.
5. Tetraedrul regulat $VABC$ are lungimea laturii $AB = 12$ cm, punctul O este centrul feței ABC. Suma lungimilor distanțelor de la punctul O la fețele laterale ale tetraedrului regulat este egal cu ... cm.
6. În tabelul de mai jos este o de dependență funcțională.

x	-1	0	a
y=-x+4	5	4	2

Conform informațiilor din tabel, numărul real a este egală cu ....

SUBIECTUL al II-lea

1. Desenați triunchiul de con circular drept cu secțiunea axială trapezul isoscel $ABB'A'$.
2. Să se demonstreze că oricare ar fi numerele reale x, y are loc inegalitatea
$$(\sqrt{3}x - y)^2 \leq 4(x^2 + y^2).$$
3. Diferența pătratelor a două numere reale este de trei ori mai mare decât suma lor. Aflați numerelor, știind că un un sfert din primul număr reprezintă o treime din al doilea număr.
4. Calculați:
$$\frac{1}{4\sqrt{5}+5\sqrt{4}} + \frac{1}{5\sqrt{6}+6\sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{1443\sqrt{1444}+1444\sqrt{1443}}.$$
5. Graficul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ intersectează axa ordonatelor în punctul $N(0, 3)$ și face cu axa absciselor un unghi cu măsura de 60°.
   (a) Determinați forma funcției de gradul I.
   (b) Arătați că $\frac{f(x^2)+f(y^2)}{2} = f\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)$.

[1] Universitatea din Pitești, crina.diaconu@upit.ro

SUBIECTUL al III-lea

1. Fie triunghiul ABC cu lungimile laturilor egale cu $AB = 12$ cm, $AC = 16$ cm și $BC = 20$ cm. Se consideră punctele O și M astfel încât punctul O este mijlocul laturii $[BC]$, iar punctul $M \in (AC)$ astfel încât $OM \perp AC$. Calculați:
   a) Aria triunghiului ABC.
   b) Demonstrați că $\frac{CM}{AC} \cdot \frac{AB}{OM} = 1$.
   c) Calculați raportul perimetrelor triunghiurilor COM și ABC.
2. Pe planul trapezului isoscel $ABCD$, ($AB \parallel CD$, $AB > CD$) de arie 24 cm^2 și $BC = 4$ cm se ridică prin mijlocul laturii $[BC]$ perpendiculara MM', $MM' = 6$ cm, M este mijlocul segmentului $[BC]$. Se cer:
   a) Să se calculeze aria triunghiului ADM.
   b) Calculați distanța de la punctul M' la latura $[AD]$.
   c) Calculați tangenta unghiului format de planul $(M'DA)$ cu planul (ABC).

Testul 2

Costel Anghel [2] *și Florea Badea* [3]

SUBIECTUL I

1. Rezultatul calculului $(-1)^{-1} : 10^3$ este egal cu ....
2. Dacă $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$ și $\frac{b}{c} = \frac{5}{11}$ atunci $\frac{a}{c}$ este egal cu ....
3. Un triunghi echilateral are aria egală cu $\frac{7\sqrt{3}}{4}$ cm^2. Perimetrul acestui triunghi este egal cu ....
4. Un triunghi dreptunghic are ipotenuza de 10 cm. Raza cercului circumscris acestui triunghi are lungimea egală cu ... cm.
5. Diagonala unui cub este de $9\sqrt{3}$ cm. Volumul aceluiași cub este egal cu ... cm^3.
6. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + 5$, $a \in \mathbb{R}^\star$. Punctul fix care aparține graficului funcției f, este $A(\ldots, \ldots)$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}^\star$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Desenați o prismă pentagonală $ABCDEA'B'C'D'E'$.
2. Calculați media aritmetică a numerelor naturale de trei cifre, multiplii ai numărului 225.
3. Arătați că numărul $A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} + \frac{2(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}}$ aparține intervalului $(3, 4)$.
4. Se dă expresia $E(x) = \frac{x-3}{3} \cdot \left(\frac{x^2+6x+9}{x^2-9} - \frac{x^2}{(x+3)(x-3)} \right)$. Se cer:
   a) Aflați numerele $x \in \mathbb{R}$, pentru care $E(x)$ are sens.
   b) Aduceți expresia $E(x)$ la forma cea mai simplă.
   c) Aflați $n \in \mathbb{Z}$ pentru care $E(n) \in \mathbb{N}$.

[2] Colegiul Național "Ion Minulescu", Slatina, anghelcostel2012@yahoo.com
[3] Școala Gimnazială "Nicolae Coculescu", Scornicești

SUBIECTUL al III-lea

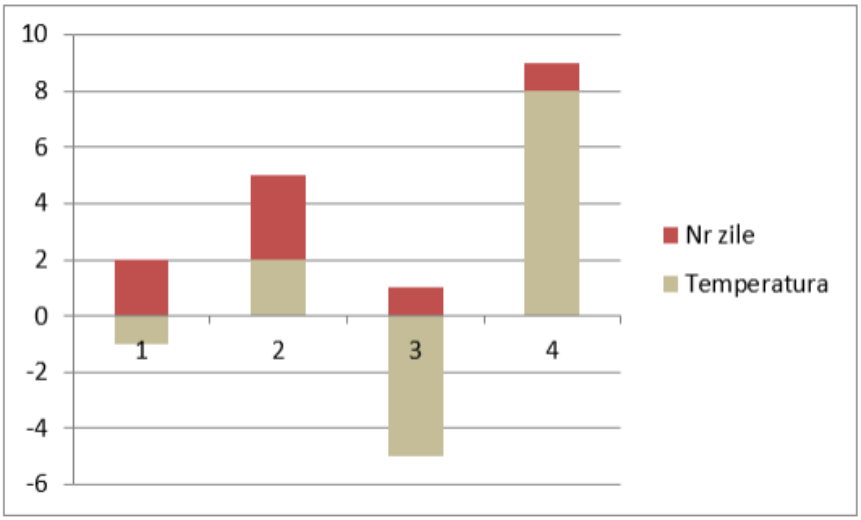
1. În dreptunghiul $ABCD$ se știe că $AB = \frac{3}{4} \cdot CD$ și aria dreptunghiului este egală cu 15 cm^2.
   a) Aflați lungimea dreptunghiului.
   b) Calculați sinusul unghiului $\sphericalangle BAC$.
   c) Aflați raza cercului înscris în triunghiul ABC, cu aproximație de o sutime, prin lipsă.
2. Se consideră tetraedrul regulat $ABCD$ care are înălțimea egală cu $6\sqrt{6}$ cm. Se cer:
   a) Suma lungimilor muchiilor tetraedrului $ABCD$.
   b) Distanța de la centrul bazei la o față laterală.
   c) Distanța dintre două muchii necoplanare.

Testul 3

Ecaterina Iancu [4]

SUBIECTUL I

1. Rezultatul calculului $\frac{1}{2} + 2^{-1} + 0,5$ este egal cu ....
2. Suma pătratelor perfecte din intervalul $(0, 30]$ este ....
3. Știind că prețul unui produs este de 120 lei, atunci prețul final după o mărire de 15% este ... lei.
4. Într-o piramidă patrulateră regulată $VABCD$ cu muchia bazei de 6 cm, dacă măsura unghiului dintre o muchie laterală și planului bazei (ABC) este de 30°, atunci aria triunghiului VBD este egală cu ... cm^2.
5. Știind că lungimea unui cerc se exprimă printr-un număr care reprezintă 25% din aria aceluiași cerc, atunci aria cercului dat este egală cu ... cm^2.
6. Conform diagramei de mai jos, temperatura medie inregistrată este egală cu ....



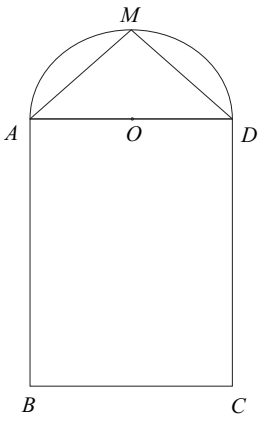
[4] Școala Gimnazială Beleți, Negrești, catyiancu19@gmail.com

SUBIECTUL al II-lea

1. Desenați, pe foaia de examen, un trunchi de piramidă patrulateră regulată.
2. Arătați că media geometrică a numerelor $a = \frac{1}{2+\sqrt{2}} + \left(\frac{\sqrt{2}+2}{2}\right)^{-1}$ și $b = \frac{4}{\sqrt{2}+2} + 2 \cdot |\sqrt{2}+2|$ este un număr irațional.
3. După două ieftiniri succesive de 20%, prețul unei mașini de cusut este de 2000 lei. Care a fost prețul inițial al acestei mașini?
4. Fie $f : (-\infty, 2) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 2$.
   (a) Trasați graficul funcției într-un sistem de axe de coordonate xOy.
   (b) Aduceți expresia $E(x)$ la forma cea mai simplă.
   (c) Aflați distanța de la originea sistemului de axe la graficul funcției.
5. Fie expresia $E(x) = \left(\frac{x^2-4}{x} - \frac{5x^2-1}{5x+1}\right)(2x+1)$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{5}, 0\}$. Să se aducă la forma cea mai simplă și să se afle $x \in \mathbb{N}$ astfel încât $E(x)$ să fie un număr întreg.

SUBIECTUL al III-lea

1. În figura alăturată este reprezentată o schiță a unei uși formată dintr-un dreptunghi $ABCD$ a cărui lungime este egală cu 20 dm, iar lățimea este egală cu 60% din lungime și un semicerc cu centrul în punctul O.



   a) Aflați măsura unghiului MAD.
   b) Să se determine perimetrul schiței.
   c) Să se afle cât la sută din suprafața dreptunghiului $ABCD$ reprezintă suprafața triunghiului AMD.

2. Se consideră consideră cubul $ABCDEFGH$ cu lungimea muchiei de 4 cm și $\{O\} = AC \cap BD$. Se cer:
   a) Să se calculeze aria secțiunii $ACGE$, unde $\sqrt{2} \approx 1,41$.
   b) Să se determine măsura unghiului dintre dreapta HO și planul (ABC).
   c) Să se calculeze volumul piramidei $DAHC$.

Testul 4

Daniel Codeci [5]

SUBIECTUL I

1. Rezultatul calculului $53 - 42 : 6$ este egal cu ....
2. Trei kg de pere costă 9,6 lei. Cinci kg de pere de aceeași calitate costă ... lei.
3. Între orele 11^{50} și 13^{10} sunt ... minute.
4. Un triunghi echialteral are latura de lungime 10 cm. Perimetrul acestui triunghi este egal cu ... cm.

[5] Școala Gimnazială ,,Carol I", Curtea de Argeș, danielcodeci@yahoo.com

5. Un paralelipiped dreptunghic cu baza pătrat are muchia bazei egală cu 4 cm și înălțimea egală cu $3,5$ cm. Volumul paralelipipedului este egal cu ... cm^3.
6. Temperaturile medii înregistrate în prima săptămână a lunii ianuarie sunt reprezentate în tabelul următor:

Data	1 ian	2 ian	3 ian	4 ian	5 ian	6 ian	7 ian
Nota	$-8°$ C	$-7°$C	$-8,5°$C	$-3°$C	$-0,5°$C	$4°$C	$0°$C

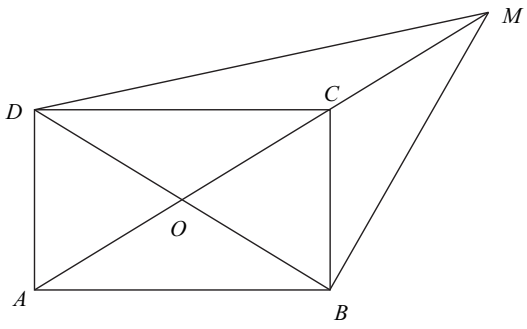
Cea mai friguroasă zi din săptămână a fost ....

SUBIECTUL al II-lea

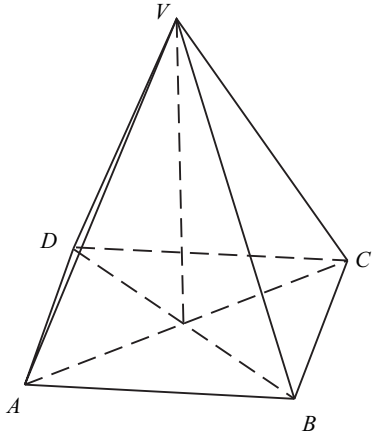
1. Desenați, pe foaia de examen, un cilindru circular drept cu secțiunea axială un pătrat notat $ABCD$.
2. Arătați că media geometrică a numerelor $a = |\sqrt{5} - 3|$ și $b = \sqrt{(\sqrt{5}+3)^2}$ este egală cu 2.
3. Elevii unei școli au fost așezați în rânduri de câte patru elevi, altă dată în rânduri de câte cinci elevi și altă dată în rânduri de câte șase elevi, de fiecare dată rămânând câte doi elevi care nu formează un rând complet.
   a) Verificați dacă pot fi 242 de elevi în școală.
   b) Determinați numărul minim de elevi din școală.
4. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 4$. Calculați distanța de la originea sistemului de axe xOy la imaginea geometrică a graficului acestei funcții.
5. Arătați că expresia $E(x) = \left(\dfrac{x+2}{x^2-x} + \dfrac{x-3}{x^2-1} - \dfrac{x-1}{x^2+x}\right) : \dfrac{x^2-3x+2}{x^3-2x^2+x} = \dfrac{x+1}{x-2}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1, 2\}$.

SUBIECTUL al III-lea

1. În figura alăturată este reprezentat un dreptunghi $ABCD$, cu măsura unghiului CAB de $30°$. Dacă M este simetricul punctului O față de punctul C, iar aria triunghiului AOD este egală cu $25\sqrt{3}$ cm^2, atunci:
   a) Arătați că $AD = 10$ cm.
   b) Demonstrați că triunghiul OBM este dreptunghic.
   c) Arătați că aria patrulaterului $ABMD$ este egală cu $150\sqrt{3}$ cm^2.



2. În figura alăturată este reprezentată o piramidă patrulateră regulată $VABCD$, având lungimile muchiilor egale cu 6 cm.
   a) Arătați că $VO = 3\sqrt{2}$ cm.
   b) Determinați distanța de la punctul A la planul (VBC).
   c) O furnică se deplasează pe suprafața laterală a piramidei, de la punctul A la punctul C pe drumul cel mai scurt. Aflați lungimea acestui drum.



Testul 5

Ileana Ioana Panait [6]

SUBIECTUL I

1. Rezultatul calculului $15 - 20 : 4$ este egal cu ....
2. Cel mai mic număr din mulțimea $A = \{x \in \mathbb{Z} : \ x \geq -3\}$ este egal cu ....
3. Produsul numerelor întregi din intervalul $[-1; 15)$ este egal cu ....
4. Perimterul unui dreptunghi este egal cu $28,6$ cm. Suma dintre lungimea și lătimea sa este egală cu ... cm.
5. Cubul $ABCDA'B'C'D'$ are volumul egal cu 64 cm^3. Diagonala BD' a cubului are lungimea egală cu ... cm.
6. În tabelul de mai jos sunt prezentate notele obținute de elevii unei clase la un test. Media notelor elevilor care au luat cel mult nota 7 la testul respectiv este egală cu ...

Nota	5	6	7	8	9	10
Număr elevi	3	4	8	7	5	2

SUBIECTUL al II-lea

1. Desenați, pe foaia de examen, un trunchi de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$.
2. Calculați media aritmetică a numerelor $x = \sqrt{(5+\sqrt{7})^2}$ și $y = |\sqrt{7} - 5|$.
3. Un turist a parcurs un traseu în trei zile: în prima zi a parcurs 25% din lungimea drumului, a doua zi, a parcurs cinci optimi din rest, iar a treia zi, ultimii 27 km. Aflați lungimea drumului parcurs de turist.
4. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 7$.
   a) Reprezentați grafic funcția într-un sistem de axe ortogonale.
   b) Determinați perimetrul triunghiului determinat de garficul funcției f și axele sistemului de coordonate.
5. Arătați că expresia $E(x) = \dfrac{5}{x-5} : [\dfrac{2x}{x^2-25} - \dfrac{5x^2}{x^2+25} \cdot (\dfrac{x}{5x+25} + \dfrac{5}{x^2+5x})] = \dfrac{5(x+5)}{x(7-x)}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, 0, 5, 7\}$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Fie dreptunghiul $MNPQ$ și punctul $S \in (MN)$ astfel încât $MQ = MS = 15$ cm, iar lungimea segmentului SN reprezintă o cincime din lungimea lui MS.
   a) Calculați perimetrul dreptunghiului $MNPQ$.
   b) Determinați aria triunghiului QSP.
   c) Calculați sinusul unghiului QSP.
2. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată. Se cunosc lungimile laturilor $AB = 6\sqrt{3}$ cm și $AA' = 4$ cm, iar punctul S reprezintă mijlocul laturii BC.
   a) Determinați volumul prismei.
   b) Calculați lungimea segmentului $A'S$.
   c) Determinați distanța de la punctul A la planul $(A'BC)$.

[6] Colegiul Național ,,Constantin Cantacuzino", Târgoviște, yoana_panait@yahoo.com

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Științe ale naturii

Testul 1

Marius Macarie [1]

SUBIECTUL I

1. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât 3^{x+1}, 9^x și $5 \cdot 3^x - 6$ să fie termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
2. Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi inecuația $\left|\dfrac{3x-2}{x+1}\right| \leq 2$.
3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_x(3x^2+2x) = \log_x(6-3x)$.
4. În câte moduri se poate alege o echipă formată din 5 elevi, cu cel mult 2 fete, dintr-un grup de 10 elevi din care 6 sunt băieți?
5. În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,-1)$, $B(-3,2)$ și $C(4,3)$. Să se calculeze $\overrightarrow{BC} \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.
6. Să se arate că $[\sin(\pi - x) + \cos(\pi - x)]^2 + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right) = 1$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+4z=0 \\ x+ay+a^2z=0 \end{cases}$, unde a este număr real.
   a) Să se arate că $\det A(a) = (a-1)(a-2)$, pentru orice număr real a.
   b) Să se determine matricea $X \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ astfel încât $X \cdot A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.
   c) Să se determine numărul întreg a pentru care sistemul de ecuații are soluție unică (x_0, y_0, z_0) și x_0, y_0, z_0 sunt numere întregi.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = \dfrac{1}{2020}xy - (x+y) + 4040$.
   a) Să se arate că $x \circ y = \dfrac{1}{2020}(x-2020)(y-2020) + 2020$.
   b) Să se determine valorile reale ale lui x pentru care $x \circ x \circ x \leq x \circ 2020$.
   c) Să se determine numărul natural nenul a, știind că $\log_{2020} a \circ 2021 = 2019$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} - \{1,2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)(x-2)}$.
   a) Să se arate că $f'(x) = \frac{x(4-3x)}{(x-1)^2(x-2)^2}$, $x \in \mathbb{R} - \{1,2\}$.
   b) Să se determine asimptotele graficului funcției f.
   c) Să se determine imaginea funcției f.
2. Se consideră funcția $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \dfrac{\ln x}{x}$.
   a) Să se arate că $\displaystyle\int_1^{e^2} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}\,x = \frac{e^6 + 3e^2 + 2}{3}$.

[1] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, macariem@yahoo.com

b) Să se determine primitiva F a lui f pentru care $F(1) = 5$.

c) Să se arate că $\int_1^e (f'(x) + xf''(x))\,\mathrm{d}\,x = e - 2$.

Testul 2

Raluca Mihaela Georgescu [2]

SUBIECTUL I

1. Fie progresia aritmetică cu termeni pozitivi $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_1+a_2+a_3 = 30$ și $a_1a_2a_3 = 360$. Să se calculeze S_{10}.
2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$. Să se calculeze $(f \circ f \circ f)(1)$.
3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x+5} = (x+2)^2 - x^2 - 4x - 2$.
4. Să se calculeze probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de patru cifre, acesta să fie pătrat perfect.
5. Să se calculeze aria triunghiului ABC, cu $A(2, m)$, $B(1, 1)$, $C(3, 1)$, $m \in \mathbb{R}$, știind că triunghiul ABC este dreptunghic isoscel.
6. Să se determine tg x, știind că $\sin x = \frac{4}{5}$ și $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricele $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$, cu $a \in \mathbb{R}$.

   a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât matricea $A(a)$ să fie inversabilă.

   b) Să se determine $a \in \mathbb{Z}$ astfel încât matricea $A^{-1}(a)$ să aibă toate elementele numere întregi.

   c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\det(A^3 - A^2) = 0$.

2. Pe mulțimea $G = (1, \infty)$ se definește legea de compoziție " $*$ ", $x * y = xy - x - y + 2$.

   a) Să se arate că $x * y = (x-1)(y-1) + 1$, pentru orice $x,\ y \in G$.

   b) Să se arate că mulțimea G este parte stabilă în raport cu legea " $*$ ".

   c) Să se rezolve în G ecuația $x * x * x = x$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Fie funcția $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^{2x}}{x^3}$.

   a) Să se calculeze $f'(x)$.

   b) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției în punctul de abscisă $x = 1$.

   c) Să se arate că $f(x) \geq \frac{8e^3}{27}$, pentru orice $x \in (0, \infty)$.

2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+4}{e^x}$.

   a) Să se calculeze $\int_0^2 \frac{e^{-x}}{f(x)} dx$.

[2] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, gemiral@yahoo.com

b) Să se arate că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.
c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=e^x f(x)$.

Testul 3

Mihai Florea Dumitrescu [3]

SUBIECTUL I

1. Aflați numerele complexe, pur imaginare care verifică egalitatea $|z|+\bar{z}+z=1$.
2. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2-5x+7$. Rezolvați ecuația $(f\circ g)(x)=(f\circ f)(1)$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{7+\sqrt[3]{x}}=2$.
4. Care este probabilitatea ca, alegând o submulțime cu trei elemente din mulțimea $\{1,2,3,4,5,6\}$, suma celor trei elemente să se dividă cu 3.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$,$B(-1,2)$ și $C(-2,-4)$. Calculați lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$.
6. Să se rezolve ecuația $\sin(x^2-3x+2)=0$, unde $x\in[1,2]$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x\\ x & x\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & x\end{pmatrix}$, unde x este un număr real.
   a) Arătați că $-\det A(-n)$ este par oricare ar fi numărul natural n.
   b) Calculați numărul natural n care verifică egalitatea $\mathrm{Tr}[A(0)\cdot B(0)]+\mathrm{Tr}[A(1)\cdot B(1)]+...+\mathrm{Tr}[A(n)\cdot B(n)]=30$, unde $\mathrm{Tr}X$ este urma matricei X.
   c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\det[A(x)+B(x)]=\det[A(x)\cdot B(x)]$.
2. Se consideră polinomul $f=X^3+aX^2+bX+ab$, unde a și b sunt numere întregi nenule și x_1,x_2 și x_3 rădăcinile sale.
   a) Aflați numerele întregi a și b astfel încât polinomul f se divide cu polinomul $X+1$.
   b) Pentru $b=a^2$, aflați valorile întregi ale lui a pentru care are loc egalitatea $|x_1|+|x_2|+|x_3|=2019$.
   c) Arătați că dacă rădăcinile polinomului f verifică egalitatea

$$\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)\cdot\left(\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}\right)=1,$$

   atunci b este pătrat perfect.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+x$.
   a) Calculați $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.
   b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

[3] Profesor, Liceul „Ștefan Diaconescu”, Potcoava, florin14mihai@yahoo.com

c) Arătați că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $[1, +\infty)$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x + 3$.

a) Arătați că $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x = \frac{16}{3}$.

b) Calculați $\int_0^1 (x+2)\sqrt{f(x)}\,\mathrm{d}\,x$.

c) Aflați numărul real pozitiv a, astfel încât volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g : [0, a] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x+1}{f(x)}$ este egal cu $\frac{\pi}{6}$.

Testul 4

Maria-Crina Diaconu [4]

SUBIECTUL I

1. Să se calculeze $(2 + 2i)^{2020}$.
2. Rezolvați in $\mathbb{R}$ ecuația $3^{log_2(2x^2-1)} = 27$.
3. Să se afle câte submulțimi cu 5 elemente are o mulțime cu 7 elemente.
4. Care este probabilitatea ca alegând la întâmplare un element x din mulțimea $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$, acesta să fie soluție a ecuației $x^3 + 2x - 3 = 0$?
5. Dacă $y = mx + n$ este ecuația dreptei ce trece prin punctul $P(4, 3)$ și este perpendiculară pe dreapta de ecuație $x - y = 0$ să se calculeze $n + m$.
6. Să se determine numărul de soluții în intervalul $[0, 2\pi]$ ale ecuației $|\sin x| = \cos x$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $M = \{X(u)/X(u) = I_2 + uA, u > -1\}$.

a) Calculați $\det(A^{2020})$.

b) Să se arate că $X(u)X(v) = X(u + v + uv)$.

c) Să se calculeze $X(1)X(2)...X(2020)$.

2. Considerăm polinomul $f = X^2 + \hat{3}X + \hat{2} \in \mathbb{Z}_5[X]$.

a) Arătați că $a^5 = a$ pentru orice $a \in \mathbb{Z}_5$.

b) Determinați valoarea polinomului f în $\hat{2}$.

c) Arătați că polinomul f este reductibil peste $\mathbb{Z}_5$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$.

a) Calculați $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) + 1}{x}$.

b) Determinați asimptotele graficului funcției f.

c) Studiați monotonia și convexitatea funcției f.

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} (2x-1)\ln x, & \text{dacă } x \geq 1 \\ x - 1, & \text{dacă } x < 1 \end{cases}$

a) Demonstrați că f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Calculați $\int_1^e \frac{f(x)}{\ln x}\,\mathrm{d}\,x$.

[4] Asist. univ. dr., Universitatea din Pitești, crynutza_25@yahoo.com

c) Calculați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului restricției funcției f la $[0,1]$.

Testul 5

Marian Teler [5]

SUBIECTUL I

1. Calculați produsul primelor 3 zecimale ale numărului real $\sqrt{26}$.
2. Se consideră funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x-3}{x+3}$. Calculați $f(0)\cdot f(1)\cdot\ldots\cdot f(10)$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $\sqrt{3-x}=x-3$.
4. Calculați $C_5^3+A_6^2$.
5. Calculați $\sin 30^0+\cos 120^0$.
6. Să se calculeze aria triunghiului ABC știind că $AB=5$, $AC=4$, $m\left(\measuredangle BAC\right)=30^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se considerã matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ și $X(a)=I_2+aA$, $a\in\mathbb{R}$

   a) Să se calculeze A^2-2A.
   b) Demonstrați că $X(a)X(b)=X(a+b+2ab)$, $(\forall)\,a,b\in\mathbb{R}$.
   c) Calculați:
      i) $X(a)X(-\frac{1}{2})$, $a\in\mathbb{R}$,
      ii) $X(-\frac{1}{10})X(-\frac{1}{9})\ldots X(-\frac{1}{3})X(-\frac{1}{2})X(-1)$.

2. Se consideră polinoamele $f=X^3+aX^2+a^2X+a^3$, $g=a^3Y^3+a^2Y^2+aY+1$, $a\in\mathbb{R}^*$ și fie $x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3\in\mathbb{C}$, rădăcinile lor.

   a) Calculați $f(-a)$.
   b) Demonstrați că polinomul f are o singură rădăcină reală.
   c) Demonstrați că $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=y_1+y_2+y_3$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\ln x$.

   a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.
   b) Demonstrați că funcția f este strict crescătoare.
   c) Demonstrați că funcția f nu are puncte de inflexiune.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

   a) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare.
   b) Calculați $\int\limits_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}\,x$.
   c) Calculați $\int\limits_0^8 f\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}\,x$.

[5] Profesor, Liceul Teoretic Costești, Argeș, teler_marian@yahoo.com

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Matematică-Informatică

TESTUL 1

Marian Teler [1]

SUBIECTUL I (30p)

1. Demonstrați că $\log_5 \frac{1}{25} + \log_{\frac{1}{3}} 9 = -4$. **(5p)**

2. Determinați a, $b \in \mathbb{R}$, știind că parabolele asociate funcțiilor f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + b$, $g(x) = -2x^2 + ax + 1$ au același vârf. **(5p)**

3. Rezolași ecuația $\log_2(x+1) - \log_4(x+1) = \frac{1}{2}$. **(5p)**

4. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$, acesta să fie pătrat perfect sau cub perfect. **(5p)**

5. Se dau punctele $A(1, -2)$, $B(3, 0)$. Să se determine coordonatele punctului M, știind că B este mijlocul segmentului (AM). **(5p)**

6. Calculați aria triunghiului ABC, știind că $AB = 5$, $AC = 6$, $BC = 7$. **(5p)**

SUBIECTUL al II-lea (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$, unde $a \in \mathbb{R}$ și fie A matricea sistemului.

a) Arătați că $\det(A) = (a-1)^2(a+2)$. **(5p)**

b) Determinați valorile reale ale lui a pentru care sistemul are soluție unică. **(5p)**

c) Pentru $a = 1$ rezolvați sistemul. **(5p)**

2. În $\mathbb{R}[X]$ se consideră polinomul $f = X^3 + 3X^2 - aX - 1$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3.

a) Determinați a știind că polinomul f se divide prin $X - 1$. **(5p)**

b) Pentru $a = 3$, calculați $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$. **(5p)**

c) Pentru $a = 3$, verificați dacă $(1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3) = -4$. **(5p)**

SUBIECTUL al III-lea (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{x - 1}$.

a) Calculați $f'(x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. **(5p)**

b) Verificați dacă $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x} = -2$. **(5p)**

c) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(0, f(0))$. **(5p)**

[1] Liceul Teoretic Costești, Argeş, teler_marian@yahoo.com

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, se consideră numerele $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{x+2}dx$.

a) Calculați I_1. **(5p)**

b) Demonstrați că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este monoton şi mărginit. **(5p)**

c) Verificați dacă $I_{n+1} + 2I_n = \dfrac{1}{n+1}$ și determinați $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$. **(5p)**

TESTUL 2

Ana Maria Iordache [2]

SUBIECTUL I (30p)

1. Dacă $z = \dfrac{1-3i}{1+i}$, determinați partea reală a numărului $z - 2\overline{z} + z^{-1}$. **(5p)**

2. Rezolvați ecuația $\log_2(x-2) + \log_8 2(x-2) = 3$. **(5p)**

3. Aflați $a \in \mathbb{R}$, astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \to (-\infty, 5]$, $f(x) = -x^2 - 3x + 2a - 3$ să fie surjectivă. **(5p)**

4. Calculați probabilitatea ca alegând un multiplu natural de 3, mai mic decat 100, acesta să se dividă cu 5. **(5p)**

5. În reperul cartezian se consideră punctele $A(-2,1)$, $B(1,3)$ și $C(0,-2)$. Determinați coordonatele punctului de intersecție dintre mediana din A și înălțimea din B din triunghiul ABC. **(5p)**

6. Calculați $\sin\left(\arccos\dfrac{1}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right)$. **(5p)**

SUBIECTUL al II-lea (30p)

1. În $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculați $\det(A(3) - 2A(-1) + I_3)$. **(5p)**

b) Rezolvați în $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ecuația $A(3)X = A(-2)$. **(5p)**

c) Determinați matricea $B = A(1) + [A(1)]^2 + \ldots + [A(1)]^{20}$. **(5p)**

2. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compozitie

$$x * y = xy - 4x - 4y + 20.$$

a) Demonstrați că $(4, \infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea $*$. **(5p)**

b) Rezolvați ecuația $x * x * x * x = 4$, $x \in \mathbb{R}$. **(5p)**

c) Calculați $0 * 1 * 2 * \ldots * 2020$. **(5p)**

[2] Liceul Tehnic „Virgil Madgearu”, Roșiori de Vede, anamariayord@yahoo.com

SUBIECTUL al III-lea (30p)

1. Fie $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3}{\ln x}$.

a) Studiați monotonia funcției. **(5p)**

b) Comparați numerele $f\left(\sqrt[5]{e}\right)$ și $f\left(\sqrt[7]{e^2}\right)$. **(5p)**

c) Determinați punctul în care tangenta la graficul funcţiei în punctul de abscisă e, intersectează axa Ox. **(5p)**

2. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x-\dfrac{1}{x(x+1)}$.

a) Determinați primitivele funcției f care se anulează în 2. **(5p)**

b) Demonstrați că primitivele funcției f sunt convexe pe $(0,\infty)$. **(5p)**

c) Calculați $\displaystyle\int_1^e x^2 f(x)dx$. **(5p)**

TESTUL 3

Raluca Mihaela Georgescu [3]

SUBIECTUL I (30p)

1. Arătați că numărul $\lg(3+2\sqrt{2})-\lg(3-2\sqrt{2})-\lg(17+12\sqrt{2})$ este natural. **(5p)**

2. Determinați distanța dintre punctele de intersecție ale graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+4$ cu axele de coordonate. **(5p)**

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{2x}-3^x\cdot\log_3 81+\log_3 27=0$. **(5p)**

4. Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor cu cifre distincte ce se pot forma cu ajutorul cifrelor $\{1,2,3,4,5\}$, acesta să aibă trei cifre. **(5p)**

5. În reperul cartezian XOY se consideră punctele $A(2,1)$, $B(1,2)$ și $C(4,3)$. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul A și este paralelă cu mediana din B a triunghiului ABC. **(5p)**

6. Determinați $\operatorname{tg}x$, știind că $\sin x=-\dfrac{1}{3}$ și $x\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$. **(5p)**

SUBIECTUL al II-lea (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} 5x+my-3z &= m+1\\ -3x+5y+mz &= 4m+10\\ mx-3y+5z &= 2\end{cases}$, unde m este un parametru real.

a) Determinați $m\in\mathbb{R}$ astfel încât matricea atașată sistemului să fie inversabilă. **(5p)**

b) Rezolvați sistemul pentru $m=1$. **(5p)**

c) Studiați compatibilitatea sistemului pentru $m\in\mathbb{R}$. **(5p)**

[3] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, gemiral@yahoo.com

2. Pe mulțimea $G = (2, \infty)$ se definește legea de compoziție " $*$ ", $x * y = xy - 2(x + y) + 6$.

a) Arătați că mulțimea G este parte stabilă în raport cu legea " $*$ ". **(5p)**

b) Calculați $(-100) * (-99) * ... * 99 * 100$. **(5p)**

c) Rezolvați în G ecuația $x * x * x * x * x = x$. **(5p)**

SUBIECTUL al III-lea (30p)

1. Fie funcţia $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 4x + 8}}{x}$.

a) Calculați $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - \sqrt{13}}{x - 1}$. **(5p)**

b) Determinați asimptotele funcției. **(5p)**

c) Arătați că $f(x) + \frac{\sqrt{2}}{2} < 0$, $\forall\ x < 0$. **(5p)**

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$.

a) Calculați $\int\limits_2^3 \dfrac{f(x)}{x - 1} dx$. **(5p)**

b) Calculați $\int\limits_1^3 f(x) dx$. **(5p)**

c) Calculați $\int\limits_3^4 \dfrac{2x - 1}{f(x)} dx$. **(5p)**

TESTUL 4

Elena Codeci [4]

SUBIECTUL I (30p)

1. Să se calculeze $\mathrm{Re}(1 + i)^{2020}$. **(5p)**

2. Să se determine $m \in \mathbb{R}$, știind că dreapta de ecuație $x = 2$ este axă de simetrie pentru graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - (m - 1)x + 3$. **(5p)**

3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\log_2^2 2x + 7 \log_2 x - 1 = 0$. **(5p)**

4. Să se arate că $(n!)^2 \mid (2n)!$, oricare ar fi n număr natural. **(5p)**

5. Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel încât dreptele $d_1 : 2x + (m+1)y + 5 = 0$ și $d_2 : -mx + 3y + 5 = 0$ să fie perpendiculare. **(5p)**

6. Știind că $\sin x \cdot \cos x = \dfrac{1}{4}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, să se calculeze $\sin x - \cos x$. **(5p)**

SUBIECTUL al II-lea (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x + 2y + (m+1)z = 3 \\ -(m+1)x + y + z = -1 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$, unde $m \in \mathbb{R}$.

[4] Colegiul Național „Vlaicu Vodă", Curtea de Argeș, codeci_lili@yahoo.com

a) Aflați $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul are soluție unică. **(5p)**

b) Pentru $m = 1$, arătați că sistemul este compatibl și găsiți $\min\{x^2 + y^2 + z^2\}$. **(5p)**

c) Pentru $m = -3$, arătați că sistemul este incompatibil. **(5p)**

2. Se consideră polinomul $f = X^n + 5X^{n-2} + 1$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că f nu are nici o rădăcină în $\mathbb{Q}$. **(5p)**

b) Arătați că dacă $x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, atunci $f(x) \notin \mathbb{Z}$. **(5p)**

c) Arătați că f nu are toate rădăcinile reale. **(5p)**

SUBIECTUL al III-lea (30p)

1. Fie funcţia $f_m = \dfrac{mx^2 + (m-1)x}{x+1}$, $x \neq -1$, $m \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că asimptotele oblice la graficele funcţiilor din familia $(f_m)_{m\in\mathbb{R}}$ trec printr-un punct fix. **(5p)**

b) Determinați m astfel încât f să aibă 2 puncte de extrem situate de o parte și de alta a dreptei de ecuație $x = -1$. **(5p)**

c) Pentru $m = 0$, determinați $f^{(2020)}(0)$. **(5p)**

2. Se consideră șirul $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + 2x + 3} dx$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Calculați I_0. **(5p)**

b) Arătați că $(I_n)_{n\geq 0}$ este convergent și calculați $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$. **(5p)**

c) Determinați volumul corpului de rotație, obținut prin rotirea graficului funcției $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x^2 + 2x + 3}}$, în jurul axei Ox. **(5p)**

TESTUL 5

Antonio Mihail Nuică [5]

SUBIECTUL I (30p)

1. Să se determine $\mathrm{Re}z$, pentru $z = \dfrac{1+3i}{3-i}$. **(5p)**

2. Să se determine al zecelea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, pentru care $a_2 = 3$, $a_4 = 9$. **(5p)**

3. Să se rezolve ecuația $\sqrt[3]{8-x} = \sqrt[3]{9-4x}$. **(5p)**

4. Să se determine probabilitatea ca alegând o funcție $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$, aceasta să fie injectivă și cu proprietatea $f(1) = 1$. **(5p)**

5. Să se calculeze $\sin 105°$. **(5p)**

6. Să se calculeze raza cercului înscris în triunghiul ABC, pentru care $AB = 3$, $BC = 5$, $CA = 4$ **(5p)**

[5] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, antonio.nuica@upit.ro

SUBIECTUL al II-lea (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuații $\left\{\begin{array}{rcl} x+\alpha y+2z & = & 1 \\ 2x+2y+z & = & -1 \\ x+y-z & = & \beta \end{array}\right.$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Determinați α și β astfel încât sistemul să fie compatibil determinat. **(5p)**

b) Pentru $\alpha = 1$, să se determine β astfel încât sistemul să fie compatibil simplu nedeterminat. **(5p)**

c) Pentru $\alpha = 1$, să se determine β astfel încât sistemul să fie incompatibil. **(5p)**

2. Fie polinomul $f = X^6 - 2X^3 + m$, $m \in \mathbb{R}$ și $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ rădăcinile sale.

a) Să se determine rădăcinile lui f pentru $m = 1$. **(5p)**

b) Să se determine rădăcinile lui f pentru $m = 0$. **(5p)**

c) Să se determine rădăcinile lui f pentru $m = -3$. **(5p)**

SUBIECTUL al III-lea (30p)

1. Se consideră funcția $f : (-1, 0) \cup (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3 + x^2}}$.

a) Să se determine asimptotele la graficul lui f. **(5p)**

b) Să se studieze monotonia lui f. **(5p)**

c) Să se determine ecuația tangentei la graficul lui f în $(1, 1/\sqrt{2})$. **(5p)**

2. Fie $f(x) = \ln x$, $x > 0$.

a) Să se calculeze $\displaystyle\int f(x)dx$. **(5p)**

b) Să se calculeze $\displaystyle\int_1^2 xf(x)dx$. **(5p)**

c) Să se calculeze $\displaystyle\int_{1/2}^e |f(x)|dx$. **(5p)**

Teste pentru admiterea la facultate

Testul 1

Antonio Mihail Nuică [1]

SUBIECTUL I

Fie polinomul $f = X^4 + mX^2 + 1$, $m \in \mathbb{R}$.

a) Să se afle rădăcinile sale pentru $m = 2$.
b) Să se afle rădăcinile sale pentru $m = 0$.
c) Să se arate că pentru $m > 0$ nu toate rădăcinile polinomului sunt reale.

SUBIECTUL al II-lea

Fie funcția $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$.

a) Să se determine domeniul maximal de definiție (D) al funcției.
b) Să se determine asimptotele la graficul funcției.
c) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției.
d) Să se calculeze $\int_2^3 f^2(x)\ dx$.

SUBIECTUL al III-lea

Fie punctele $A(0,0)$, $B(2,0)$ și $C(m,2)$, $m \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că aria triunghiului ABC este egală cu 2, pentru orice $m \in \mathbb{R}$.
b) Să se arate că triunghiul ABC nu poate fi dreptunghic în C.
c) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât triunghiul ABC să fie dreptunghic.

Testul 2

Alina-Florentina Ștefan [2]

SUBIECTUL I

Fie sistemul $\begin{cases} (\lambda+3)x + y + z = 1 \\ x + (\lambda+3)y + z = \lambda + 1 \\ x + y + (\lambda+3)z = (\lambda+1)^2 \end{cases}$, cu λ parametru real.

a) Calculați determinantul matricei sistemului.
b) Să se discute în funcție de valoarea parametrului λ, compatibilitatea sistemului.
c) Să se determine soluția sistemului în cazul în care acesta are soluție unică.
d) Să se rezolve sistemul în cazul $\lambda = -5$.

SUBIECTUL al II-lea

Se consideră funcția $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 5x + 6}$, D fiind domeniul maximal de definiție al lui f.

[1] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, antonio_74nm@yahoo.com
[2] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, florentina.stefan@upit.ro

a) Să se precizeze domeniul maximal de definiție al funcției f.
b) Să se construiască graficul funcției f.
c) Să se calculeze
$$\lim_{n\to\infty} n\left(\int_0^n f(x)dx - \frac{1+2+...+n}{f(1)+f(2)+...f(n)}\right)$$
.
d) Calculați volumul corpului de rotație determinat prin rotirea graficului restricției funcției f la $[2,3]$ în jurul axei Ox.

SUBIECTUL al III-lea

În sistemul xOy se consideră punctele $M(m,0), N(m-1,2m-1), m\in(0,\infty)$.

a) Să se determine m astfel încât triunghiul MON să fie isoscel.
b) Să se scrie ecuația generală a dreptei ce trece prin punctul $O(0,0)$ și este paralela cu dreapta MN.
c) Să se afle locul geometric al mijlocului medianei duse din $O(0,0)$ în $\triangle MON$.
d) Să se determine $m\in\mathbb{N}^*$ astfel încât aria triunghiului MON să fie minimă (MON triunghi nedegenerat).

Testul 3

D.M.I. [3]

Algebră

1. Se consideră funcția $f: D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{\log_x\sqrt{3x}}\cdot\log_3 x$, unde D este domeniul maxim de definiție.
   a) Să se afle mulțimea D.
   b) Să se rezolve ecuația $f(x)=-1$.
2. Să se arate că:
   a) $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i iC_n^i=0,\ \forall\ n\in\mathbb{N}^*$.
   b) dacă $a_1,\ a_2,...,a_{n+1}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ sunt numere reale în progresie aritmetică, atunci avem $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i a_{i+1}=0$.
3. Se dă polinomul: $P(X)=X^{2n+1}-(2n+1)X^{n+1}+(2n+1)X^n-1,\ (n\in\mathbb{N}^*)$. Să se arate că $P(X)$ se divide prin $(X-1)^2$ și să se calculeze câturile împărțirilor lui $P(X)$ prin $(X-1)$, respectiv prin $(X-1)^2$.
4. Să se rezolve și să se discute după parametrul real m sistemul:
$$\begin{cases} x+(m+1)y+z &= -m^2+m+2\\ mx+y-z &= 0\\ x-2y-mz &= -m^2+3m-2\end{cases}$$
5. Se consideră mulțimea $M=\left\{A=\begin{pmatrix}1&\ln a&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\mid a\in(0,\infty)\right\}$. Să se arate că înmulțirea determină pe mulțimea M o structură de grup comutativ.

[3] Universitatea din Pitești, revista.matinf@upit.ro

Analiză Matematică

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}+a, & x<0 \\ b\cdot\ln(x+1), & x\geq 0 \end{cases}$
   Determinați parametrii reali a și b astfel încât f să fie continuă și derivabilă.
2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$.
   a) Descompuneți funcția f în fracții simple.
   b) Determinați derivata de ordin n a funcției f.
3. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$
   a) Determinați asimptotele funcției f.
   b) Arătați că f admite primitive.
4. Fie șirul $(a_n)_n$, $a_n=\int\limits_1^n \dfrac{x+2}{x(x^2+1)}dx$. Calculați limita șirului.
5. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+mx^2+nx+p$. Determinați parametrii reali $m,\ n,\ p$ astfel încât funcția f să admită extreme locale în punctele -1 și 1, iar $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx=2$.

Geometrie și Trigonometrie

1. Se consideră un triunghi isoscel ABC, $(AB)\equiv(AC)$ și punctele variabile $P\in(AB)$, $Q\in(AB)$ astfel încât $(BP)\equiv(AQ)$. Fie O mijlocul segmentului (PQ).
   a) Să se demonstreze că $d(O,BC)$ este constantă.
   b) Să se afle locul geometric al punctului O.
2. Fie ABC un triunghi înscris într-un cerc, D și E mijloacelor arcelor $\overset{\frown}{AB}$ și $\overset{\frown}{AC}$, iar F, G intersecțiile lui DE cu AB și AC. Să se arate că triunghiul AFG este isoscel.
3. Să se rezolve ecuația: $\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos 2x$.
4. Unei sfere de rază R i se circumscrie un trunchi de con. Știind că raza bazei mici este de patru ori mai mică decât raza bazei mari, să se afle aria totală și volumul trunchiului de con.
5. Dreptele: $(AC):\ 3x-y+6=0$; $(AB):\ 2x+y-6=0$; $(BC):\ y=0$, formează triunghiul ABC.
   a) Să se afle coordonatele vârfurilor, lungimile laturilor și aria triunghiului.
   b) O paralelă la AB intersectează laturile AC și BC în D și E. Să se afle locul geometric al punctului M de intersecție a dreptelor AE și BD.

(Admiterea la Universitatea din Pitești, specializările *Matematică* și *Matematică-Informatică*, 1997)

Teste grilă pentru admiterea la facultate

Testul 1

Mihai Florea Dumitrescu [1]

1. Imaginea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left[\dfrac{2(x^2+x+1)}{x^2+1}\right]$ este:

   a) $\mathbb{Z}$; b) $\{0,1\}$; c) $\{1,2,3\}$; d) $\{-1,0,1\}$; e) $\{0\}$.
2. Produsul soluțiilor ecuației $\sqrt{x+15}=\sqrt[3]{x+7}+2$ este:

   a) 6; b) 30; c) -15; d) 90; e) 45.
3. Dacă $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică cu $a_{21}=101$, atunci S_{41} este egală cu:

   a) 2121; b) 4141; c) 2021; d) 4041; e) 2120.
4. Dacă $l=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$, atunci:

   a) $l=1$; b) $l=\sqrt{e}$; c) $l=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$; d) $l=\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$; e) $l=\dfrac{1}{\sqrt[6]{e}}$.
5. Dacă $x\in[-1,1]$, atunci $\sin^2(2\arcsin x)$ este egală cu:

   a) $2x^2-1$; b) $4x^2(1-x^2)$; c) $1-x^2$; d) $\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$; e) $\dfrac{x^2}{1+x^2}$.
6. Dacă $l=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{1+2+3+...+n}{1^3+2^3+3^3+...+n^3}}\cdot\sqrt[3]{1^2+2^2+...+n^2}$, atunci:

   a) $l=\sqrt[6]{\dfrac{8}{9}}$; b) $l=\sqrt[6]{\dfrac{2}{3}}$; c) $l=\sqrt[3]{6}$; d) $l=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{6}}$; e) $l=\dfrac{1}{\sqrt[3]{12}}$.
7. Numărul termenilor raționali din dezvoltarea $\left(\sqrt{5}+\sqrt[4]{2}\right)^{2020}$ este:

   a) 1010; b) 505; c) 506; d) 507; e) 1011.
8. Restul împărțirii polinomului $f=x^{2020}+(x-1)^{2020}$ la polinomul x^3-2x^2+x este:

   a) $2019x^2+x+1$; b) $2020x^2+1$; c) $2020x^2-2020x+1$; d) $2019x^2+x$; e) $2020x^2-x-1$.
9. Numărul natural n care verifică egalitatea $\cos\dfrac{\pi}{n}=\dfrac{1}{\sqrt{n}-1}$ este egal cu:

   a) 2; b) 3; c) 6; d) 5; e) 8.
10. Determinantul $D=\begin{vmatrix} a & b & c\\ b & c & a\\ c & a & b\end{vmatrix}$, cu a,b,c numere reale pozitive astfel încât $a^2+b^2+c^2=14$ și $ab+ac+bc=11$ este egal cu:

    a) 19; b) 89; c) 29; d) 122; e) 18.
11. Valorile lui a și b pentru care are loc egalitatea: $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x+5}+ax+1)=b$ sunt:

    a) $a=-1,b=1$; b) $a=-1,b=\dfrac{1}{2}$; c) $a=-1,b=2$;

    d) $a=-1,b=0$; e) $a=\dfrac{1}{2},b=1$.

[1] Liceul „Ștefan Diaconescu”, Potcoava, florin14mihai@yahoo.com

12. Numărul rădăcinilor reale ale ecuației $x^3+7x^2-2=0$ în intervalul $(-1,1)$ este:

    a) 1; b) 2; c) 0; d) 3; e) 4.

13. Integrala $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$ este egală cu:

    a) $\frac{3\pi}{2}-\frac{152}{35}$; b) $\frac{3\pi}{4}-\frac{152}{35}$; c) $\frac{3\pi}{2}-\frac{151}{35}$; d) $\frac{\pi}{2}-\frac{152}{35}$; e) $\frac{3\pi}{2}+\frac{152}{35}$.

14. Pentru $x\in\mathbb{R}$ expresia $C_{2020}^1+2C_{2020}^2x+...+2020C_{2020}^{2020}x^{2019}$ este egală cu:

    a) $2020(1+x)^{2019}$; b) $2021x^{2020}$; c) $(1+x)^{2020}$; d) $2020(1+x)^{2021}$; e) $(1+x)^{2021}$.

15. Integrala $\int\limits_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}dx$ este egală cu:

    a) $I=\frac{1}{3}(3\sqrt{3}-1)$; b)$I=\frac{1}{3}(3\sqrt{3}+1)$; c) $I=\frac{1}{3}(3\sqrt{3}-2)$;

    d) $I=\frac{1}{3}(3\sqrt{3}-2\sqrt{2}-1)$; e) $I=3\sqrt{3}$.

Testul 2

Mihaela Gabor [2]

1. Se dau numerele pozitive a_1,a_2,a_3 în progresie aritmetică. Dacă $a_1+a_2+a_3=21$ și numerele a_1+2,a_2+3,a_3+9 sunt în progresie geometrică, atunci suma $a_1^2+a_2^2+a_3^2$ este:

    a) 148; b) 159; c) 168; d) 179.

2. Găsiți numerele reale m și n pentru care ecuația $x^4-10x^3+36x^2+4mx-3n=0$ are o rădăcină triplă mai mică decât 3.

    a) $m=-4,n=\frac{32}{5}$; b) $m=9,n=-27$; c)$m=-14,n=-\frac{32}{3}$; d) $m=4,n=\frac{32}{5}$.

3. Fie M proiecția punctului $A(6,4)$ pe dreapta de ecuație $2x-3y+1=0$. Calculați coordonatele lui M:

    a) $x=\frac{55}{13},y=\frac{76}{13}$; b) $x=\frac{76}{13},y=\frac{55}{13}$; c) $x=-\frac{76}{13},y=-\frac{55}{13}$; d) $x=\frac{76}{13},y=-\frac{55}{13}$.

4. Rezolvați inecuația $\lg 2+\lg(4^{x-2}+9)\leq 1+\lg(2^{x-2}+1)$.

    a) $(2,4)$; b) $\left[\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$; c) $[2,4]$; d) $[1,4]$.

5. Fie $A\in M_2(\mathbb{R})$ cu $detA=5$. Stabiliți care afirmație este adevărată:

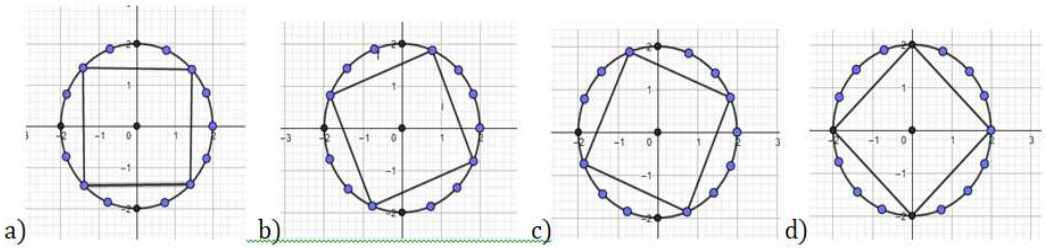
    a) $det(-A)=-5$; b) $det(-2A)=20$; c) $det(3A)=15$; d) $det(-3A)=15$.

6. Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care $e^{2x}+me^x+m-1>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

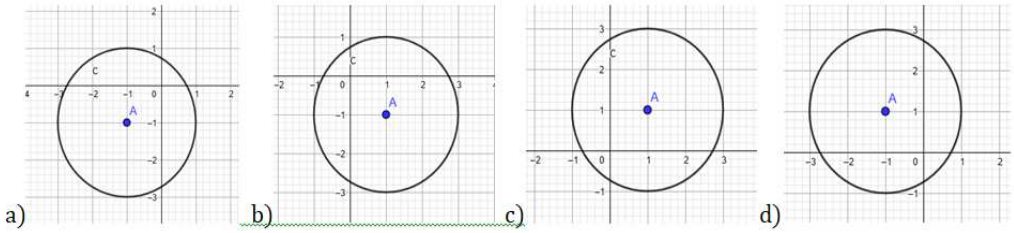
    a) $m\in[1,\infty)$; b) $m\in[-1,1]$; c) $m\in(-\infty,1]$; d) $m=1$.

7. Imaginea geometrică a soluțiilor ecuației $z^4=2i$ este:

[2] Colegiul Național ,,C. Carabella", Târgoviște, mihaela_gab0r@yahoo.com



8. Soluția ecuației $|z-1-i|=2$ este:



9. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{k+1}{10^k}$:

   a) $\dfrac{10}{9}$; b) $\dfrac{100}{81}$; c) $\dfrac{12}{81}$; d) $\dfrac{11}{10}$.

10. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x(x^2-x-1)$. Produsul valorilor funcției în punctele sale de extrem local este:

    a) 0; b) $-\dfrac{5}{e}$; c) $\dfrac{1}{e}$; d) $5e^3$.

11. Determinați numărul real m pentru care ecuația $m(x+1)=e^{|x|}$ are exact două soluții reale distincte:

    a) $m\in(1,\infty)$; b) $m\in(-\infty,-e^2)\cup(1,\infty)$; c) $m\in(-\infty,-e^2)\cup(0,\infty)$; d) $m\in(0,\infty)$.

12. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^2\dfrac{|x-n|}{x+n}dx$:

    a) 2; b) ∞; c) $\dfrac{\pi}{6}$; d) 1.

13. Determinați aria mulțimii $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}, 0\le x\le 1, 0\le y\le xe^{x+1}\}$:

    a) $\ln 2$; b) $2e$; c) e; d) e^2.

14. Determinați valorile parametrului real m, pentru care sistemul $\begin{cases} mx+y+z=0\\ x+my+z=0\\ x+y+mz=0\end{cases}$ este compatibil simplu nedeterminat:

    a) $m=-2$; b) $m=-1$; c) $m=1$; d) $m=\pm 1$.

15. Fie $a\in\mathbb{R}$ cu $\operatorname{tg} a=\dfrac{2}{5}$. Calculați $|\sin a|$:

    a) $\dfrac{4}{21}$; b) $\dfrac{2}{\sqrt{29}}$; c) $\dfrac{4}{29}$; d) $\dfrac{2}{\sqrt{21}}$.

Testul 3

D.M.I [3]

1. Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*, f(x)=2^{-x}+3^x+4^x+6^{-x}$, atunci $\mathrm{Im}(f)=$

   a) $[1,4]$; b) $[2,4]$; c) $(4,\infty)$; d) $[2,\infty)$; e) $[4,\infty)$.
2. Mulțimea soluțiilor inecuației $\sqrt{x^2+4}>x+1$ este:

   a) $(1,\infty)$; b) $(-1,\infty)$; c) $(-\infty,-1)$; d) $\left(-1,\frac{3}{2}\right)$; e) $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$.
3. Dacă $(b_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică și $S_3=40$, $S_6=60$, atunci $S_9=$

   a) 70; b) 80; c) 100; d) 75; e) $60\sqrt[3]{2}$.
4. Valoarea parametrului nenul a, pentru care

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{(1-a)^2n^4+n^2+1}}{an^2}=2,$$

   este

   a) $a=\frac{1}{3}$; b) $a=-\frac{1}{5}$; c) $a=-\frac{1}{3}$; d) $a=1$; e) $a=-1$.
5. Suma coeficienților binomiali ai dezvoltării $(1+x)^n+(1+x)^{n+2}$ este 2560. Atunci coeficientul lui x^5 este

   a) 588; b) 210; c) 462; d) 672; e) 252.
6. Dacă $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-x\sin x-\cos x}{x^2}$, atunci:

   a) $L=\frac{1}{3}$; b) $L=\frac{1}{2}$; c) $L=\frac{2}{3}$; d) $L=-\frac{1}{2}$; e) $L=0$.
7. Dacă $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ este soluția sistemului $\begin{cases} 2x-y+2z &= 7\\ x-y-z &= -3\\ 2x+3y+z &= 8\end{cases}$, atunci $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=$

   a) 9; b) 5; c) -12; d) 10; e) 11.
8. Dacă polinomul cu coeficienți reali $P=aX^4+bX^2+5$ este divizibil cu $Q=X^2-2X+1$, atunci $a^2+b^2=$

   a) 50; b) 125; c) 25; d) 100; e) 13.
9. $\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^0 e^x(2x^2-3x)dx=$

   a) 0; b) $-\infty$; c) -7; d) 7; e) $+\infty$.
10. Rangul matricei $A=\begin{pmatrix}2 & \alpha & -2 & 2\\ 4 & -1 & 2\alpha & 5\\ 2 & 10 & -12 & 1\end{pmatrix}$, $(\alpha\in\mathbb{R})$ este 3 dacă și numai dacă

    a) $\alpha\in(-3,3)$; b) $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$; c) $\alpha\in(-\infty,3)$; d) $\alpha\in\{3\}$; e) $\alpha\in(3,\infty)$.
11. Valorile parametrilor reali a și b, pentru care graficul funcției

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\sqrt[3]{ax^3+bx^2}$$

[3] Universitatea Pitesti, revista.matinf@upit.ro

admite dreapta $y = 2x - \frac{1}{3}$ ca asimptotă, sunt:

a) $a = -5, b = 5$; b) $a = -1, b = 2$; c) $a = 0, b = 2$; d) $a = 8, b = -4$; e) $a = 1, b = 2$.

12. Dacă a este soluția ecuației $\hat{3}a + \hat{4} = \hat{6}$ cu coeficienți în $\mathbb{Z}_7$, atunci $a^{-1} =$

a) $\hat{3}$; b) $\hat{5}$; c) $\hat{4}$; d) $\hat{2}$; e) $\hat{1}$.

13. $\int_{-2}^{2} \min\{x^2 - 1, x + 1\}dx =$

a) -1; b) $-\frac{1}{2}$; c) $\frac{7}{2}$; d) $\frac{1}{4}$; e) 3.

14. Fie $S = 1 \cdot C_{15}^0 + 2 \cdot C_{15}^1 + 3 \cdot C_{15}^2 + 4 \cdot C_{15}^3 ... + 16 \cdot C_{15}^{15}$. Atunci

a) $S = 65535$; b) $S = 294912$; c) $S = 122880$; d) $S = 278528$; e) $S = 114118$.

15. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{1 + \cos x}dx =$

a) $1 - \pi$; b) $3 - \pi$; c) $1 + \pi$; d) π; e) 1.

Testul 4

Vasile Marius Macarie [4]

1. Dacă n este numărul soluțiilor ecuației $\sqrt{x^2 - 4x + 3} + |2x^2 - 5x + 3| = 0$ atunci:

a) $n = 2$; b) $n = 0$; c) $n = 1$; d) $n = 3$; e) $n = 4$.

2. Dacă termenii unei progresii geometrice cu termeni pozitivi $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ verifică sistemul

$$\begin{cases} b_2 + b_3 &= 4 \\ b_4 + b_5 &= 36 \end{cases}$$

atunci rația q este:

a) 2; b) 3; c) $\frac{1}{2}$; d) 4; e) $\frac{1}{3}$.

3. Valorile reale ale lui m pentru care parabolele asociate funcțiilor

$$f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_m(x) = x^2 - 2(m-2)x + m - 2$$

au vârful sub axa OX sunt:

a) $m \in (2, 3)$; b) $m \in (-\infty, 2] \cup (6, \infty)$; c) $m \in (1, 2)$; d) $m \in \mathbb{R}$; e) $m \in (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$.

4. Suma soluțiilor ecuației $\log_{\sqrt{x}}(x + |x - 3|) = \log_x(3x - 2 + 5|x - 3|)$ este:

a) 2; b) 5; c) 8; d) 12; e) 6.

5. Se consideră matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Soluția ecuației $X^7 = A$, $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ este:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt[7]{2^6}} & -\frac{3}{\sqrt[7]{2^6}} \\ \frac{2}{\sqrt[7]{2^6}} & \frac{2}{\sqrt[7]{2^6}} \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$;

[4] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, macariem@yahoo.com

d) $A=\begin{pmatrix} \frac{3\sqrt[7]{2}}{2} & \frac{3\sqrt[7]{2}}{2} \\ -\sqrt[7]{2} & \sqrt[7]{2} \end{pmatrix}$; e) $A=\begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt[7]{2^5}} & -\frac{3}{\sqrt[7]{2^5}} \\ \frac{2}{\sqrt[6]{2^5}} & \frac{2}{\sqrt[6]{2^5}} \end{pmatrix}$.

6. Sistemul de ecuații $\begin{cases} \alpha x+y+z &= 4 \\ (\alpha+1)x+(\beta+1)y+2z &= 7 \\ x+2\beta y+z &= 4 \end{cases}$ este compatibil nedeterminat pentru:

a) $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{1\},\ \beta\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$; b) $\alpha=1,\ \beta\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$; c) $\alpha=1,\ \beta=0$;

d) $\alpha=1,\ \beta=\frac{1}{2}$; e) $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{1\},\ \beta=\frac{1}{2}$.

7. Fie polinomul $f\in\mathbb{R}[X]$ definit prin $f=X^4+aX^3+bX+c$, $a,b,c\in\mathbb{R}$. Suma valorilor parametrilor $a,b,c\in\mathbb{R}$ pentru care polinomul f se divide cu polinomul $g=(X-1)^3$ este:

a) 2; b) -1; c) 0; d) 5; e) -3.

8. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos^3(3x)$. Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}$ este:

a) $\frac{9\sqrt{2}}{4}$; b) -9; c) 0; d) $-\frac{9\sqrt{2}}{4}$; e) $\frac{9}{4}$.

9. Fie $f:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$. Valoarea derivatei $f^{(2020)}(3)$ este:

a) 2020!; b) -2019!; c) -2021!; d) -2020!; e) 2019!.

10. Limita șirului $(a_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general $a_n=\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{(k+1)!}\right)^{(n+1)!-1}$ este:

a) 1; b) 0; c) $\frac{1}{e}$; d) e; e) $+\infty$.

11. Valoarea integralei $\int\limits_1^{e^\pi} x^n\sin(\ln x)dx$ este

a) $\frac{e^{\pi(n+1)}+1}{(n+1)^2}$; b) $\frac{e^{\pi(n+1)}}{(n+1)^2+1}$; c) $\frac{-e^{\pi(n+1)}+1}{(n+1)^2+1}$; d) $\frac{e^{\pi(n+1)}+1}{(n+1)^2+1}$; e) $\frac{-e^{\pi(n+1)}-1}{(n+1)^2-1}$.

12. Se consideră șirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ definit prin $I_n=\int\limits_0^1\dfrac{x^n}{x^2+5x+6}dx$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}nI_n$ este:

a) $\frac{1}{12}$; b) $\frac{1}{6}$; c) 0; d) $\frac{5}{6}$; e) $+\infty$.

13. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-\ln(x^2+1)$. Atunci $\int\limits_0^{4-\ln 2} f^{-1}(x)dx$, unde f^{-1} este inversa funcției bijective f este:

a) $\ln 2$; b) $\frac{\pi}{4}+\ln 2$; c) 1; d) $\frac{\pi}{2}$; e) $\ln 2-\frac{\pi}{2}$.

14. Se consideră funcția $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\sin x+\cos x, & x\in[-\pi,0]\\ e^{\cos x}, & x\in(0,\pi]\end{cases}$. Dacă $I=\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\sin x\ dx$, atunci

a) $I = e - \frac{\pi}{2}$; b) $I = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{e} + e$; c) $I = \pi - e$; d) $I = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{e} - e$; e) $I = \frac{\pi}{2}$.

15. Limita șirului cu termenul general

$$a_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + ... + \frac{1}{4n-1}$$

este

a) 0; b)$\ln 2$; c) $\frac{1}{2}\ln 2$; d) 1; e) $2\ln 2$.

PROBLEME DE INFORMATICĂ PENTRU EXAMENE

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Științe ale naturii

Testul 1

Maria Miroiu [1]

Limbajul C/C++

SUBIECTUL I (20 de puncte)

Pentru fiecare dintre itemii de la 1 la 5, scrieți pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Care dintre următoarele expresii C/C++ are valoarea 1 dacă și numai dacă variabila `a` (de tip `int`) memorează un număr natural ce are exact 2 cifre? **(4p.)**

   a) `a%100!=0`
   b) `a/100==0`
   c) `a/10!=0 && a/100==0`
   d) `a%10!=0 && a/100==0`

2. Care dintre expresiile C/C++ de mai jos are valoarea 1 dacă și numai dacă valoarea variabilei `x` este număr întreg? **(4p.)**

   a) `x-floor(x)!=0`
   b) `floor(x)==x`
   c) `x==floor(x)+1`
   d) `floor(x)+1==abs(x)`

3. Se consideră tabloul unidimensional (9,8,7,6,4,2). Dacă se aplică algoritmul de căutare binară, pentru căutarea căror valori din vector se fac exact 2 comparații? **(4p.)**

   a) 8 și 4 b) 7 și 4 c) 7 și 6 d) 8 și 6

4. În secvența C/C++ alăturată, variabilele `i`, `j` și `n` sunt de tip întreg. Ce valori ar putea avea `n` pentru ca, în urma executării secvenței, să se afișeze 6 valori? **(4p.)**

   a) 2, 3 b) 3, 4 c) 4, 5 d) 6, 7

```
for (i=1;i<n;i+=2)
   for (j=1;j<=i;j++)
    printf("%d%d",i,j);|
    cout<<i<<j;
```

5. În secvența C/C++ alăturată, variabilele `c` și `i` sunt de tip întreg. Ce valoare va avea variabila `c` în urma executării secvenței? **(4p.)**

   a) 6 b) 7 c) 9 d) 10

```
c=0;
for (i=10;i<=99;i++)
  if (i%9==0 && i%5!=0)
    c++;
printf("%d",c);|
cout<<c;
```

[1] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, maria.miroiu@gmail.com

SUBIECTUL al II-lea (40 de puncte)

Scrieți pe foaia de examen răspunsul corect pentru fiecare dintre cerințele următoare.

1. Se consideră algoritmul alăturat, descris în pseudocod, în care toate variabilele sunt de tip întreg.

```
citeste n (numar natural)
k ← 0
i ← 1
cat timp i≤n executa
|   m ← i
|   cat timp m%2=0 executa
|   |_ m ← m/2
|   daca m=1 atunci
|   |_ k ← k + 1
|_  i ← i + 1
scrie k
```

   a) Scrieți ce valoare se va afișa, dacă pentru variabila `n` se citește valoarea 9. **(6p.)**
   b) Scrieți cel mai mare număr care se poate citi ca valoare a variabilei `n`, astfel încât, în urma executării algoritmului, să afișeze valoarea 5. **(6p.)**
   c) Scrieți în pseudocod un algoritm, echivalent cu cel dat, înlocuind prima structură `cat timp ... executa` cu o altă structură repetitivă. **(6p.)**
   d) Scrieți programul C/C++ corespunzător algoritmului dat. **(10p.)**

2. Se consideră variabilele `n1` și `m1` care memorează numărătorul și numitorul unei fracții, respectiv variabilele `n2` și `m2` care memorează numărătorul și numitorul unei a doua fracții. Scrieți o secvență de cod C/C++ prin care se calculează fracția ireductibilă obținută din înmulțirea celor două fracții. **(6p.)**

3. În secvența de instrucțiuni de mai jos, variabilele `i` și `j` sunt de tip întreg. Fără a utiliza alte variabile, scrieți una sau mai multe instrucțiuni C/C++ ce pot înlocui punctele de suspensie, astfel încât, în urma executării secvenței obținute, să se afișeze matricea de mai jos. **(6p.)**

```
for (i=1;i<=5;i++) {
  for (j=1;j<=5;j++)
    ..............
  printf("\n"); |
  cout<<endl;
}
```

```
1 2 3 4 5
2 2 3 4 5
3 3 3 4 5
4 4 4 4 5
5 5 5 5 5
```

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Scrieți pe foaia de examen răspunsul corect pentru fiecare dintre cerințele următoare.

1. Se citește de la tastatură un număr natural `n` de maxim 7 cifre și o cifră `c` nenulă. Să se scrie un program C/C++ care determină și afișează numărul minim dintre toate numerele obținute prin inserarea unei cifrei `c` între cifrele lui `n`. **(10p.)**
   Exemplu: Pentru `n = 517213` și cifra `c = 6` se obține `m = 5167213`.

2. Se citește de la tastatură un număr natural nenul `n` și un tablou unidimensional `x` cu `n` elemente întregi. Scrieți un program C/C++ care determină două valori distincte ale tabloului `x`, al căror produs este minim. **(10p.)**
   Exemplu: Pentru `n = 7` și `x` = (-10, 2, -4, -3, 11, 5, 3), se vor afișa valorile -10 și 11.

3. Fișierul **bac.txt** conține pe prima linie valoarea naturală nenulă a unei variabile `n` ($1 < n \leq 100000$), iar pe următoarea linie un șir de `n` numere naturale de cel mult 2 cifre fiecare, acestea fiind despărțite prin spații. Se cere să se afișeze pe ecran, separate prin câte un spațiu, valoarea sau valorile din fișier cu număr maxim de apariții.

   a) Descrieți în limbaj natural un algoritm eficient de rezolvare a problemei. **(3p.)**
   b) Scrieți un program C/C++ care citește datele din fișier și rezolvă problema. **(7p.)**

   Exemplu: Dacă în fișierul **bac.txt** se află numerele:

   9

   21 15 33 4 62 0 4 7 81 15

   atunci pe ecran se vor afișa valorile 15 4.

Testul 2

Maria Miroiu [2]

Limbajul Pascal

SUBIECTUL I (20 de puncte)

Pentru fiecare dintre itemii de la 1 la 5, scrieți pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Care dintre următoarele expresii Pascal are valoarea `true` dacă și numai dacă variabila `a` (de tip `int`) memorează un număr natural ce are exact 2 cifre? **(4p.)**

   a) `a mod 100 <> 0`
   b) `a div 100 = 0`
   c) `(a div 10 <> 0) and (a div 100 = 0)`
   d) `(a mod 10 <> 0) and (a div 100 = 0)`

2. Care dintre expresiile Pascal de mai jos are valoarea `true` dacă și numai dacă valoarea variabilei `x` este număr întreg? **(4p.)**

   a) `x - trunc(x) <> 0`
   b) `trunc(x) = x`
   c) `x = trunc(x) + 1`
   d) `trunc(x) + 1 = abs(x)`

3. Se consideră tabloul unidimensional (9,8,7,6,4,2). Dacă se aplică algoritmul de căutare binară, pentru căutarea căror valori din vector se fac exact 2 comparații? **(4p.)**

   a) 8 și 4 b) 7 și 4 c) 7 și 6 d) 8 și 6

4. În secvența Pascal alăturată, variabilele `i`, `j` și `n` sunt de tip întreg. Ce valori ar putea avea `n` pentru ca, în urma executării secvenței, să se afișeze 6 valori? **(4p.)**

   a) 2, 3 b) 3, 4 c) 4, 5 d) 6, 7

```
i:=1;
while i<n do
begin
   for j:=1 to i do
    write(i,j);
   i:=i+2;
end;
```

[2] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, maria.miroiu@gmail.com

5. În secvența Pascal alăturată, variabilele `c` și `i` sunt de tip întreg. Ce valoare va avea variabila `c` în urma executării secvenței? **(4p.)**

   a) 6 b) 7 c) 9 d) 10

```
c:=0;
for i:=10 to 99 do
 if (i mod 9=0)and(i mod 5<>0)
   c:=c+1;
write(c);
```

SUBIECTUL al II-lea (40 de puncte)

Scrieți pe foaia de examen răspunsul corect pentru fiecare dintre cerințele următoare.

1. Se consideră algoritmul alăturat, descris în pseudocod, în care toate variabilele sunt de tip întreg.

   a) Scrieți ce valoare se va afișa, dacă pentru variabila `n` se citește valoarea 9. **(6p.)**

   b) Scrieți cel mai mare număr care se poate citi ca valoare a variabilei `n`, astfel încât, în urma executării algoritmului, să afișeze valoarea 5. **(6p.)**

   c) Scrieți în pseudocod un algoritm, echivalent cu cel dat, înlocuind prima structură `cat timp ... executa` cu o altă structură repetitivă. **(6p.)**

   d) Scrieți programul Pascal corespunzător algoritmului dat. **(10p.)**

```
citeste n (numar natural)
k ← 0
i ← 1
cat timp i≤n executa
|   m ← i
|   cat timp m%2=0 executa
|   |_ m ← m/2
|   daca m=1 atunci
|   |_ k ← k + 1
|_  i ← i + 1
scrie k
```

2. Se consideră variabilele `n1` și `m1` care memorează numărătorul și numitorul unei fracții, respectiv variabilele `n2` și `m2` care memorează numărătorul și numitorul unei a doua fracții. Scrieți o secvență de cod Pascal prin care se calculează fracția ireductibilă obținută din înmulțirea celor două fracții. **(6p.)**

3. În secvența de instrucțiuni de mai jos, variabilele `i` și `j` sunt de tip întreg. Fără a utiliza alte variabile, scrieți instrucțiunile Pascal ce pot înlocui punctele de suspensie, astfel încât, în urma executării secvenței obținute, să se afișeze matricea de mai jos. **(6p.)**

```
for i:=1 to 5 do
begin
  for j:=1 to 5 do
    ..............
  writeln;
end;
```

```
1 2 3 4 5
2 2 3 4 5
3 3 3 4 5
4 4 4 4 5
5 5 5 5 5
```

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Scrieți pe foaia de examen răspunsul corect pentru fiecare dintre cerințele următoare.

1. Se citește de la tastatură un număr natural `n` de maxim 7 cifre și o cifră `c` nenulă. Să se scrie un program Pascal care determină și afișează numărul minim dintre toate numerele

obținute prin inserarea unei cifrei `c` între cifrele lui `n`. **(10p.)**
Exemplu: Pentru `n = 517213` și cifra `c = 6` se obține `m = 5167213`.

2. Se citește de la tastatură un număr natural nenul `n` și un tablou unidimensional `x` cu `n` elemente întregi. Scrieți un program Pascal care determină două valori distincte ale tabloului `x`, al căror produs este minim. **(10p.)**
Exemplu: Pentru `n = 7` și `x` = (-10, 2, -4, -3, 11, 5, 3), se vor afișa valorile -10 și 11.

3. Fișierul **bac.txt** conține pe prima linie valoarea naturală nenulă a unei variabile `n` ($1 < $ `n` ≤ 100000), iar pe următoarea linie un șir de `n` numere naturale de cel mult 2 cifre fiecare, acestea fiind despărțite prin spații. Se cere să se afișeze pe ecran, separate prin câte un spațiu, valoarea sau valorile din fișier cu număr maxim de apariții.

   a) Descrieți în limbaj natural un algoritm eficient de rezolvare a problemei. **(3p.)**
   b) Scrieți un program Pascal care citește datele din fișier și rezolvă problema. **(7p.)**

   Exemplu: Dacă în fișierul **bac.txt** se află numerele:

   9

   21 15 33 4 62 0 4 7 81 15

   atunci pe ecran se vor afișa valorile 15 4.

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Matematică-Informatică

Testul 1

Maria Tătulea [1]

Limbajul C/C++

SUBIECTUL I (20 de puncte)

Pentru fiecare dintre itemii de la 1 la 5, scrieţi pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Care dintre următoarele expresii este adevărată dacă şi numai dacă numerele naturale `x` şi `y` au ca divizor comun pe `3`? **(4p.)**
   a) `x%3 && y%3`
   b) `!x%3 && y%3`
   c) `!(x%3 || y%3)`
   d) `x%3==0 || y%3==0`

2. Se consideră funcţia următoare. Ce valoare are `f(32456)`? **(4p.)**

```
int f(int x)
{if(!x) return 0;
if(x%2) return x%10 + f(x/10);
return (x-1)%10 + f(x/10);}
```

   a) 0 b) 17 c) 18 d) 19

3. Fie mulţimea `A={a,b,c,d,e}`. Utilizând metoda backtracking se construiesc toate secvenţele cu `3` litere din mulţimea `A`. Câte secvenţe au număr par de vocale (`a` şi `e` sunt vocale)? **(4p.)**
   a) 63 b) 64 c) 65 d) 66

4. Care este înălţimea maximă a unui arbore cu `11` noduri, ştiind că fiecare nod care nu este rădăcină sau frunză are mai mulţi fii decât părintele său? **(4p.)**
   a) 2
   b) 4
   c) 10
   d) nu există un astfel de arbore

5. Un graf orientat cu 6 vârfuri, numerotate de la 1 la 6 are mulțimea arcelor $\{(1,2), (1,4), (1,6), (2,4), (3,1), (3,4), (3,6), (6,1)\}$. Indicați numărul de subgrafuri ale sale, pentru fiecare dintre acestea mulțimea arcelor fiind $\{(1,6), (3,1), (3,6), (6,1)\}$. **(4p.)**
   a) 2 b) 3 c) 4 d) 1

SUBIECTUL al II-lea (40 de puncte)

Scrieţi pe foaia de examen răspunsul pentru fiecare din cerinţele următoare.

1. Algoritmul următor este reprezentat în pseudocod. S-a notat cu `a%b` restul împărţirii numărului natural `a` la numărul natural nenul `b` şi cu `[c]` partea întreagă a numărului real `c`.

[1] Profesor, Colegiul Național „Dinicu Golescu”, Câmpulung, mariatatulea@yahoo.com

a) Scrieţi valoarea afişată dacă se citesc, în această ordine, numerele: `62521, 2571, 2, 56, 614`. **(6p.)**

b) Daţi exemplu de un set de date de intrare astfel încât, în urma executării algoritmului, valoarea variabilei `nr` să fie `4`. **(6p.)**

c) Scrieţi programul C/C++ corespunzător algoritmului dat. **(10p.)**

d) Scrieţi în pseudocod un algoritm echivalent cu cel dat, înlocuind structura `repetă.....până când` cu o structură repetitivă de alt tip. **(6p.)**

```
a ← 0
k ← 0
nr ← 0
repeta
|    citeste x (numar natural)
|    nr ← nr+1
|    cat timp x>99 executa
|    |_ x ← [x/10]
|    daca x>9 atunci
|    |  a ← a*100+x
|    |_ k ← k+1
|_pana cand k=4
scrie a,nr
```

2. În declarările următoare, câmpurile `h,m,s` ale înregistrării pot memora ora, minutul şi secunda unui interval de timp.

Scrieţi în limbajul C/C++ instrucţiunile necesare adunării în variabila `t` a două intervale de timp memorate în variabilele `t1` şi `t2`. **(6p.)**

```
struct moment
{ int h,m,s;
} t1,t2,t;
```

3. Variabilele `i` şi `j` sunt de tip întreg, iar variabila `a` memorează un tablou bidimensional cu `5` linii şi `5` coloane, numerotate de la `1` la `5`, având iniţial toate elementele nule. Fără a utiliza alte variabile decât cele menţionate, scrieţi secvenţa de instrucţiuni de mai jos, înlocuind punctele de suspensie astfel încât, în urma executării secvenţei obţinute, variabila `a` să memoreze matricea de mai jos. **(6p.)**

```
for(i=1;i<=5;i++)
        for(j=1;j<=5;j++)
            ............
```

1	2	3	4	0
2	4	1	3	0
3	1	4	2	0
4	3	2	1	0
0	0	0	0	0

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Scrieţi pe foaia de examen răspunsul pentru fiecare din cerinţele următoare.

1. Scrieţi definiţia completă a unui subprogram `inserare` cu doi parametri:
   - `v`, prin care primeşte un tablou unidimensional cu `n` elemente, numere întregi;
   - `n`, prin care primeşte un număr natural (`1≤n≤100`).

   Subprogramul inserează între oricare două elemente de aceeaşi paritate situate pe poziţii consecutive, media aritmetică a celor două numere şi furnizează tot prin parametrii `v` şi `n`, tabloul modificat.

   Exemplu: pentru `n = 5` şi `v = 1 21 3 4 8`, după modificare vectorul va conţine: `1 11 21 12 3 4 6 8`. **(10p.)**

2. Un şir cu maximum `255` de caractere conţine cuvinte formate numai din litere mici ale alfabetului englez. Cuvintele sunt despărţite prin unul sau mai multe spaţii. Scrieţi un program C/C++ care citeşte un astfel de şir, construieşte în memorie şi afişează şirul obţinut prin eliminarea cuvintelor de lungime impară care conţin ca sufix primul cuvânt

din şir, ca în exemplul de mai jos. Un cuvânt `a` este un sufix pentru cuvântul `b` dacă există un cuvânt `c` de lungime mai mare sau egală cu `0`, astfel încât prin alipirea cuvântului `a` la sfârşitul cuvântului `c` se obţine cuvântul `b`. **(10p.)**

Exemplu: pentru şirul: **este un amurg de poveste şi soarele apune peste creste**, se va afişa: **este un amurg de şi soarele apune creste**

3. Pe prima linie a fişierului `bac.in` se găsesc numere naturale separate prin câte un spaţiu. Ele formează mai multe şiruri crescătoare de numere naturale, sfârşitul fiecărui şir fiind marcat de valoarea `-1` (care nu face parte din şir). Ştiind că valorile numerelor din şiruri nu depăşesc, în valoare absolută, valoarea `10000` şi că în total sunt `2000` de numere, scrieţi un program care să afişeze numerele comune tuturor şirurilor, în ordinea crescătoare a valorilor lor.

   De exemplu, dacă fişierul conţine: `2 3 3 4 5 8 9 -1 2 4 5 8 11 -1 2 3 5 8 12 -1`, atunci se va afişa `2 5 8`.

   a) Scrieţi programul C/C++ corespunzător. **(8p.)**
   b) Descrieţi în limbaj natural o metodă eficientă de rezolvare ca timp de executare. **(2p.)**

Testul 2

Doru Anastasiu Popescu [2]

Limbajul C/C++

SUBIECTUL I (20 de puncte)

Pentru fiecare dintre itemii de la 1 la 5, scrieţi pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. O expresie C/C++ care are valoarea diferită de 0 este: **(4p.)**

   a) `'v'<'V'`
   b) `10%2==4%3`
   c) `'d'=='e'-1`
   d) `113%11==100%10`

2. Se consideră funcția f, definită în dreapta. **(4p.)**

   Indicaţi ce se afişează după execuția instrucțiunii C/C++ următoare:
   `printf("%d",f(75,30)+f(10,30)+f(24,24));`
   respectiv
   `cout<<f(75,30)+f(10,30)+f(24,24);`

   a) 40 b) 39 c) 37 d) 49

```
int f(int a, int b)
{
 if(a<b) f(a,b-a);
 if(b<a) f(a-b,b);
 return a;
}
```

3. Utilizând metoda backtracking, se generează toate toate numerele de 4 cifre în ordine lexicografică formate numai din cifre impare distincte. Primele 4 numere generate sunt: 1357, 1359, 1537, 1539. A cincea soluție este: **(4p.)**

   a) 1533 b) 1573 c) 3579 d) 1597

4. Numărul maxim de componente conexe ale unui graf neorientat cu 100 de noduri și 45 de muchii este: **(4p.)**

[2] Conf. univ. dr., Universitatea din Pitești, dopopan@yahoo.com

a) 45 b) 90 c) 91 d) 92

5. Care este numărul de frunze ale arborelui cu vectorul de tați t = (8, 0, 2, 3, 8, 3, 2, 3): **(4p.)**

a) 5 b) 4 c) 3 d) 6

SUBIECTUL al II-lea (40 de puncte)

Scrieți pe foaia de examen răspunsul pentru fiecare dintre cerințele următoare.

1. Se consideră algoritmul de mai jos, scris în pseudocod.

S-a notat cu $a\%b$ restul împărţirii numărului natural a la numărul natural nenul b şi cu $[c]$ partea întreagă a numărului real c.

```
citeste n (numar natural nenul)
p←1
x←2
cat timp x≤9 executa
| t←0
| cat timp n%x=0 executa
| | t←t+1
| | n←[n/x]
| |_
| p←p*(t+1)
|_x←x+1
scrie p
```

a) Scrieţi valoarea afişată dacă se citește numărul 1000. **(6p.)**
b) Scrieţi trei numere distincte din intervalul [10, 30] care pot fi citite, astfel încât în urma executării algoritmului, pentru fiecare dintre acestea, valoarea afişată să fie 1. **(6p.)**
c) Scrieţi programul C/C++ corespunzător algoritmului dat. **(10p.)**
d) Scrieţi în pseudocod un algoritm, echivalent cu cel dat, înlocuind prima structură `cât timp... execută` cu o structură de tip `pentru...execută`. **(6p.)**

2. Se consideră `s` o variabilă ce memorează șirul de caractere `simularelabacalaureat`. Scrieți o secvență de instrucțiuni care să șteargă din `s` toate vocale mici. **(6p.)**

3. Se consideră structurile și variabilele definite alăturat. Scrieți secvența de instrucțiuni care verifică în același timp dacă segmentul memorat în `S` este pe axa Ox, iar punctul memorat în `P` se află pe axa Oy. **(6p.)**

```
struct punct {
int x,y;
} P;
struct segment {
struct punct A,B;
} S;
```

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Subprogramul `MaxMin` are patru parametri, `a` și `b`, prin care primeşte câte un număr natural ($2 \le a < b \le 10000$), `x` și `y` două numere natural ce trebuiesc returnate. Subprogramul returnează cel mai mare (parametrul `x`) și cel mai mic (parametrul `y`) număr natural din intervalul [`a`,`b`] cu suma cifrelor o putere a lui 2, dacă nu există niciun astfel de număr `x` și

y vor avea valoarea 0. Scrieţi definiţia completă a subprogramului. **(10p.)**
Exemplu: dacă a=15 și b=27, atunci subprogramul returnează x=17, y=26, pentru că $1+7=8=2^3$, $2+6=2^3$.

2. Se dă N număr natural cu maxim 9 cifre. Se cere să se construiască un tablou pătratic în modul următor. Prima linie conține pe fiecare coloană prima cifră din N, a doua linie conține pe fiecare coloană a doua cifră din N, și așa mai departe. **(10p.)**
Exemplu: Pentru N=2019 se va construi și afișa tabloul:

2	2	2	2
0	0	0	0
1	1	1	1
9	9	9	9

3. Fişierul **bac.txt** conţine cel mult 100000 de numere naturale cu maxim 9 cifre fiecare, separate prin câte un spațiu. Se cere să se determine câte din numerele aflate în fișier se pot scrie ca sumă de k numere natural nenule, distincte. k se citește de la tastatură. Proiectați un algoritm eficient din punctul de vedere al timpului de executare.
Exemplu: dacă fişierul **bac.txt** conţine numerele 12 2 30 1 20 5 și de la tastatură se citește pentru k valoarea 4, atunci se afişează pe ecran: 3. Numerele 12, 30 și 20 se pot scrie ca sumă de 4 numere naturale nenule distincte.
   a) Descrieți în limbaj natural algoritmul proiectat, justificând eficiența acestuia. **(2p.)**
   b) Scrieți programul C/C++ corespunzător algoritmului proiectat. **(8p.)**

PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU CONCURSURI

Rezolvarea problemelor pentru liceu din MATINF nr. 2

Clasa a IX-a

M 61. *Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$ astfel încât $0 < 2x < 3y < 4z$. Demonstrați inegalitatea*

$$2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)-\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\right)\geq 3.$$

Ovidiu Pop, Satu Mare

Soluție. Notând $\frac{x}{y}=u$ și $\frac{z}{y}=v$, avem $0<2u<3<4v$. Inegalitatea din enunț este echivalentă cu $2\left(u+\frac{1}{v}+\frac{v}{u}\right)-\left(\frac{1}{u}+v+\frac{u}{v}\right)\geq 3$, adică, după calcule, cu $(u-v)^2+(4v-3)(u-1)^2+(3-2u)(v-1)^2\geq 0$, care este adevărată. Egalitatea are loc dacă și numai dacă $u=v=1$, echivalent cu $x=y=z$.

M 62. *Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1=1$, $x_2=2$ și $x_{n+1}=2^{x_n}-x_{n-1}$, pentru $n\geq 2$. Arătați că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este crescător și că $x_n\geq n$, oricare ar fi $n\geq 1$.*

Cristinel Mortici, Târgoviște

Soluție (*Leonard Giugiuc*, Drobeta Turnu Severin). Demonstrăm că $x_{n+1}\in\mathbb{N}^*$ și $x_{n+1}>x_n$ pentru orice $n\geq 1$ prin inducție. Afirmația este adevărată pentru $n=1$. Presupunem că $x_k\in\mathbb{N}^*$ și $x_k>x_{k-1}$, unde $k\geq 2$. Atunci $x_{k+1}=2^{x_k}-x_{k-1}>2^{x_k}-x_k\geq x_k$ (ultima inegalitate se obține din *Inegalitatea lui Bernoulli*) și, evident, $x_{k+1}\in\mathbb{N}^*$. Cum orice șir strict crescător $(x_n)_{n\geq 1}$ de numere naturale nenule are proprietatea că $x_n\geq n$, oricare ar fi $n\geq 1$ (inducție!), problema este rezolvată.

M 63. *Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Determinați numerele reale $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}$ astfel încât*

$$\prod_{i=0}^{2n-1}\left(\sum_{k=i}^{i+n-1} x_{k \bmod 2n}^2+\frac{4n-1}{4n}\right)=\sum_{k=0}^{2n-1} x_k$$

($k \bmod 2n$ reprezintă restul împărțirii lui k la $2n$).

Daniel Jinga și *Costel Bălcău*, Pitești

Soluție. Aplicând *Inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz* avem $\left(\sum_{k=0}^{n-1} x_k^2+\frac{4n-1}{4n}\right)\left(\sum_{k=n}^{2n-1} x_k^2+\frac{4n-1}{4n}\right) = \left[\sum_{k=0}^{n-1} x_k^2+\underbrace{\frac{1}{(2n)^2}+\ldots+\frac{1}{(2n)^2}}_{n \text{ ori}}+\left(\sqrt{\frac{2n-1}{2n}}\right)^2\right]\left[\underbrace{\frac{1}{(2n)^2}+\ldots+\frac{1}{(2n)^2}}_{n \text{ ori}}+\sum_{k=n}^{2n-1} x_k^2+\right.$

$\left(\sqrt{\frac{2n-1}{2n}}\right)^2\Bigg] \geq \left(\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{x_k}{2n}+\frac{2n-1}{2n}\right)^2 = \left(\frac{S+2n-1}{2n}\right)^2$, unde $S=\sum_{k=0}^{2n-1}x_k$. Procedând analog de alte $n-1$ ori și înmulțind obținem că $\prod_{i=0}^{2n-1}\left(\sum_{k=i}^{i+n-1}x^2_{k \bmod 2n}+\frac{4n-1}{4n}\right) \geq \left(\frac{S+2n-1}{2n}\right)^{2n} = \left(1+\frac{S-1}{2n}\right)^{2n} \geq S$ (ultima inegalitate se obține din *Inegalitatea lui Bernoulli*). Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x_0=x_1=\ldots=x_{2n-1}=\frac{1}{2n}$.

M 64. *Fie ABC un triunghi și fie punctele D și E astfel încât $B\in(CD)$, $C\in(BE)$ și $\sphericalangle BAD\equiv\sphericalangle CAE$. Arătați că*

$$\frac{AB\cdot AD}{BD}=\frac{AC\cdot AE}{CE}.$$

Dao Thanh Oai, Vietnam și *Leonard Giugiuc*, România

Soluție. Utilizăm notațiile uzuale în $\triangle ABC$ și fie $BD=x$, $CE=y$. Notăm cu P punctul de intersecție dintre bisectoarea comună a unghiurilor BAC și DAE cu dreapta BC. Conform *Teoremei bisectoarei* în $\triangle ABC$ avem $PB=\frac{ac}{b+c}$ și $PC=\frac{ab}{b+c}$, deci $PD=\frac{c(a+x)+bx}{b+c}$ și $PE=\frac{b(a+y)+cy}{b+c}$. Atunci, conform *Teoremei bisectoarei* în $\triangle ADE$ avem $\frac{AD}{AE}=\frac{c(a+x)+bx}{b(a+y)+cy}$, (1). Fie $\alpha=m(\sphericalangle BAE)=m(\sphericalangle CAD)$. Aplicând *Teorema sinusurilor* în triunghiurile ACD și ABE avem $AD=(a+x)\cdot\frac{\sin C}{\sin\alpha}$ și $AE=(a+y)\cdot\frac{\sin B}{\sin\alpha}$, deci $\frac{AD}{AE}=\frac{(a+x)\sin C}{(a+y)\sin B}=\frac{c(a+x)}{b(a+y)}$, (2). Din (1) și (2) rezultă că $\frac{c(a+x)+bx}{b(a+y)+cy}=\frac{c(a+x)}{b(a+y)}=\frac{bx}{cy}$, de unde obținem egalitatea din enunț.

M 65. *Fie ABC un triunghi echilateral, P un punct situat pe segmentul (BC) și Q un punct situat pe arcul mic $\overset{\frown}{AB}$ al cercului circumscris triunghiului ABC astfel încât $\sphericalangle APC\equiv\sphericalangle QPB$. Arătați că*

$$\sqrt{\frac{PC}{PB}}-\frac{QA}{QB}=1.$$

Thanos Kalogerakis, Grecia

Soluție. Fie M mijlocul lui $[BC]$ și A' simetricul lui A față de M. Atunci $A'B$ și $A'C$ sunt tangente la cercul circumscris $\triangle ABC$. Evident, $P\in(MB)$. Deoarece $\sphericalangle A'PM\equiv\sphericalangle APM\equiv\sphericalangle QPB$, rezultă că $P\in(QA')$. Utilizăm următoarea *Teoremă de concurență*: simediana dusă printr-un vârf al unui triunghi trece prin punctul de intersecție a tangentelor duse prin celelalte două vârfuri la cercul circumscris triunghiului (a se vedea, de exemplu, *Y. Zhao*, *Three Lemmas in Geometry*, M.I.T., Winter Camp, 2010, `http://yufeizhao.com/olympiad/three_geometry_lemmas.pdf`). Reamintim că simediana este simetrica dreptei suport a medianei față de dreapta suport a bisectoarei din același vârf. Rezultă că QP este simediană în $\triangle BQC$, deci $\sphericalangle PQB\equiv\sphericalangle MQC$ și $\sphericalangle PQC\equiv\sphericalangle MQB$. Utilizând *Teorema sinusurilor* obținem $\frac{PC}{PB}\cdot\frac{QB}{QC}=\frac{\sin(\sphericalangle PQC)}{\sin(\sphericalangle PQB)}=\frac{\sin(\sphericalangle MQB)}{\sin(\sphericalangle MQC)}=\frac{MB}{MC}\cdot\frac{QC}{QB}$, deci $\frac{PC}{PB}=\frac{QC^2}{QB^2}$, (1). Notând $m(\sphericalangle QBA)=u$, avem $m(\sphericalangle QBC)=60^\circ+u$ și $m(\sphericalangle QAB)=60^\circ-u$. Fie R raza cercului circumscris $\triangle ABC$. Avem $QA+QB=2R(\sin u+\sin(60^\circ-u))=2R\sin(60^\circ+u)$, deci $QA+QB=QC$, (2). Din (1) și (2) rezultă egalitatea din enunț.

Clasa a X-a

M 66. *Un șir de numere reale $(a_n)_{n\geq 0}$ are proprietățile:*
i) $a_n > 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$;
ii) șirul $\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n\geq 0}$ este descrescător.
Arătați că șirul $\left(\log_{a_n} a_{n+1}\right)_{n\geq 0}$ este, de asemenea, descrescător.

Andrei Vernescu, București

Soluție. Fie $n \in \mathbb{N}$. Din inegalitatea $\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \leq \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ rezultă că $a_n a_{n+2} \leq a_{n+1}^2$, (1). Pentru a arăta că $\log_{a_{n+1}} a_{n+2} \leq \log_{a_n} a_{n+1}$, avem de stabilit că $\dfrac{\lg a_{n+2}}{\lg a_{n+1}} \leq \dfrac{\lg a_{n+1}}{\lg a_n}$ sau, echivalent, că $\lg a_n \cdot \lg a_{n+2} \leq \lg^2 a_{n+1}$. Într-adevăr, folosind *Inegalitatea mediilor* și relația (1) obținem $\lg a_n \cdot \lg a_{n+2} \leq \left(\dfrac{\lg a_n + \lg a_{n+2}}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{\lg(a_n a_{n+2})}{2}\right)^2 \leq \left(\dfrac{\lg a_{n+1}^2}{2}\right)^2 = \lg^2 a_{n+1}$.

M 67. *Fie $a, b, c \geq 0$ și $k > 0$. Notăm $s = a^k + b^k + c^k$. Demonstrați că*

$$\frac{a^k}{k + b^{k+1}} + \frac{b^k}{k + c^{k+1}} + \frac{c^k}{k + a^{k+1}} \geq \frac{3s(k+1) - s^2}{3k(k+1)}.$$

Marin Ionescu, Pitești

Soluție. Utilizând inegalitatea $x^{k+1} \geq (k+1)x - k,\ \forall\, x, k \geq 0$, (1), avem $k + b^{k+1} \geq (k+1)b$, de unde obținem, succesiv: $\dfrac{b^{k+1}}{k + b^{k+1}} \leq \dfrac{b^k}{k+1}$; $\dfrac{k}{k + b^{k+1}} \geq 1 - \dfrac{b^k}{k+1}$; $\dfrac{a^k}{k + b^{k+1}} \geq \dfrac{1}{k}\left(a^k - \dfrac{a^k b^k}{k+1}\right)$. Analog, $\dfrac{b^k}{k + c^{k+1}} \geq \dfrac{1}{k}\left(b^k - \dfrac{b^k c^k}{k+1}\right)$ și $\dfrac{c^k}{k + a^{k+1}} \geq \dfrac{1}{k}\left(c^k - \dfrac{c^k a^k}{k+1}\right)$, deci prin adunare obținem $\dfrac{a^k}{k + b^{k+1}} + \dfrac{b^k}{k + c^{k+1}} + \dfrac{c^k}{k + a^{k+1}} \geq \dfrac{1}{k}\left(s - \dfrac{a^k b^k + b^k c^k + c^k a^k}{k+1}\right)$. Cum $a^k b^k + b^k c^k + c^k a^k \leq \dfrac{s^2}{3}$, rezultă inegalitatea din enunț.

Pentru a demonstra inegalitatea (1), putem utiliza următorul rezultat: dacă f este o funcție concavă pe I, atunci pentru orice $\alpha \geq 1$ și $x, y \in I$ a.î. $\alpha x + (1-\alpha)y \in I$ avem $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$, (2). Într-adevăr, luând $z = \alpha x + (1-\alpha)y$ avem $x = \dfrac{1}{\alpha} \cdot z + \left(1 - \dfrac{1}{\alpha}\right) y$ și $\dfrac{1}{\alpha} \in (0, 1]$, deci $f(x) \geq \dfrac{1}{\alpha} \cdot f(z) + \left(1 - \dfrac{1}{\alpha}\right) f(y)$, adică (2).

Inegalitatea (1) este evident adevărată dacă $x = 0$ sau dacă $(k+1)x - k \leq 0$. Fie $x > 0$ și $k \geq 0$ a.î. $(k+1)x - k > 0$. Aplicând (2) pentru funcția concavă $\ln x$ avem $\ln\left((k+1)x + (1-k-1)\cdot 1\right) \leq (k+1)\ln x + (1-k-1)\ln 1$, de unde obținem inegalitatea (1).

M 68. *Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ distincte două câte două astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ și*

$$|z_1 - z_2|(z_1 + z_2) + |z_2 - z_3|(z_2 + z_3) + |z_3 - z_1|(z_3 + z_1) = 0.$$

Arătați că z_1, z_2, z_3 sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.

Daniel Jinga, Pitești

Soluție. Fie $A(z_1)$, $B(z_2)$ și $C(z_3)$ într-un reper cartezian xOy, unde originea O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC, deoarece $|z_1| = |z_2| = |z_3|$. Trecând la vectori, relația din ipoteză se scrie $c\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) + a\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) + b\left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}\right) = \vec{0}$, unde $c = AB$, $a = BC$, $b = CA$. Atunci obținem, succesiv: $(a+b+c)\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) - \left(a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}\right) = \vec{0}$; $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \dfrac{1}{a+b+c}\left(a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}\right)$; $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OI}$, unde H este ortocentrul iar I centrul cercului înscris triunghiului ABC. Rezultă că $H = I$, prin urmare triunghiul ABC este echilateral.

M 69. *Rezolvați în* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *sistemul*

$$\begin{cases} (x+y)^7 = x^7 + y^7 \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases}.$$

Alexandru Szőrös, Timișoara

Soluție. Utilizând identitatea $(x+y)^7 = x^7 + y^7 + 7xy(x+y)\left(x^2+xy+y^2\right)^2$, sistemul devine $\begin{cases} 7xy(x+y) = 0 \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases}$. Pentru $x = 0$ obținem $y^2 = 1$, deci $y = \pm 1$. Pentru $y = 0$ obținem $x^2 = 1$, deci $x = \pm 1$. Pentru $x + y = 0$, adică $y = -x$, obținem $x^2 = 1$, deci $x = \pm 1$. Astfel mulțimea soluțiilor este $\{(0, \pm 1), (\pm 1, 0), (1, -1)), (-1, 1)\}$.

M 70. *Arătați că în orice triunghi* ABC *are loc inegalitatea*

$$\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \geq p + \sqrt{3r(4R+r)}.$$

Marian Cucoaneș, Mărășești și *Marius Drăgan*, București

Soluție. Deoarece $ab + bc + ca = p^2 + r(4R+r)$, inegalitatea din enunț devine $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} - p \geq \sqrt{3\left(ab + bc + ca - p^2\right)}$. Utilizând *substituțiile lui Ravi* $x = p-a$, $y = p-b$, $z = p-c$, avem $p = x+y+z$, $ab + bc + ca - p^2 = xy + yz + zx$, iar inegalitatea anterioară devine $\sqrt{(x+y)(x+z)} + \sqrt{(x+y)(y+z)} + \sqrt{(x+z)(y+z)} - (x+y+z) \geq \sqrt{3(xy+yz+zx)}$. Prin ridicare la pătrat (membrul stâng este nenegativ!), aceasta este echivalentă cu $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx \geq x\sqrt{(x+y)(x+z)} + y\sqrt{(x+y)(y+z)} + z\sqrt{(x+z)(y+z)}$, inegalitate care este adevărată deoarece, folosind *Inegalitatea mediilor*, avem $x\sqrt{(x+y)(x+z)} + y\sqrt{(x+y)(y+z)} + z\sqrt{(x+z)(y+z)} \leq \dfrac{x(x+y+x+z)}{2} + \dfrac{y(x+y+y+z)}{2} + \dfrac{z(x+z+y+z)}{2} = x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx$.

Clasa a XI-a

M 71. *a) Dați exemplu de două matrice de forma* $X = \begin{pmatrix} 13a & b \\ b & 10a \end{pmatrix}$ *cu* $a, b \in \mathbb{N}$ *și* $\det(X) = 1$.

b) Arătați că există o infinitate de matrice cu proprietatea de la punctul a).

Stelian Corneliu Andronescu și *Costel Bălcău*, Pitești

Soluție. Fie ecuația $\det(X) = 1$, adică $130a^2 - b^2 = 1$. O soluție a acestei ecuații (*de tip Pell*) este $a = 5$, $b = 57$, deci matricea $X_1 = \begin{pmatrix} 13 \cdot 5 & 57 \\ 57 & 10 \cdot 5 \end{pmatrix}$ îndeplinește proprietatea din enunț. Pentru $a = 5$ și $b = 57$, considerăm matricea $Y = \begin{pmatrix} b & 130a \\ a & b \end{pmatrix}$. Evident, $\det(Y) = b^2 - 130a^2 = -1$. Prin inducție se verifică ușor că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există $a_n, b_n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $Y^n = \begin{pmatrix} b_n & 130a_n \\ a_n & b_n \end{pmatrix}$. Într-adevăr, $b_1 = 57$, $a_1 = 5$ și $b_{n+1} = 57b_n + 650a_n$, $a_{n+1} = 5b_n + 57a_n$ pentru $n \geq 1$. Rezultă că $b_{n+1} > 57b_n > b_n$, deci șirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător. Considerând matricele $X_n = \begin{pmatrix} 13a_{2n-1} & b_{2n-1} \\ b_{2n-1} & 10a_{2n-1} \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}^*$, avem $\det(X_n) = -\det\left(Y^{2n-1}\right) = 1$, deci există o infinitate de matrice cu proprietatea din enunț. Un al doilea exemplu de astfel de matrice poate fi considerată matricea $X_2 = \begin{pmatrix} 13 \cdot a_3 & b_3 \\ b_3 & 10 \cdot a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \cdot 64985 & 740943 \\ 740943 & 10 \cdot 64985 \end{pmatrix}$.

M 72. *Arătați că dacă matricele $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ verifică relațiile $A^2B = ABA$, $\det(A + B) = \det(B) \neq 0$ și $\operatorname{tr}(AB) \neq 0$, atunci $AB = BA$.*

Rămâne concluzia adevărată dacă se renunță la ipoteza $\det(B) \neq 0$?

Dar dacă se renunță la ipoteza $\operatorname{tr}(AB) \neq 0$?

Florin Stănescu, Găești

Soluție. Demonstrăm că $\det(A) \neq 0$ prin reducere la absurd. Presupunem că $\det(A) = 0$. Conform *Teoremei Hamilton-Cayley* avem $X^2 - \operatorname{tr} X \cdot X + \det(X) \cdot I_2 = O_2$, pentru orice matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Rezultă că $\operatorname{tr} X^2 - (\operatorname{tr} X)^2 + 2\det(X) = 0$, deci $\det(X) = \dfrac{(\operatorname{tr} X)^2 - \operatorname{tr} X^2}{2}$. Luând $X = AB - BA$ și utilizând egalitatea $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ obținem că $\det(AB - BA) = \operatorname{tr}(A^2B^2) - \operatorname{tr}(AB)^2$. Dar din $A^2B = ABA$ rezultă că $A^2B^2 = (AB)^2$, deci $\det(AB - BA) = 0$. Aplicând identitatea $\det(X+Y)+\det(X-Y) = 2\det(X)+2\det(Y)$, pentru orice $X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, rezultă că $\det(AB + BA) + \det(AB - BA) = 4\det(A)\det(B)$, prin urmare $\det(AB + BA) = 0$. Aplicând identitatea $\det(X + Y) = \det(X) + \det(Y) + \operatorname{tr} X \cdot \operatorname{tr} Y - \operatorname{tr}(XY)$, (1), pentru orice $X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, rezultă că $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr} A \cdot \operatorname{tr} B$. Avem $AB + BA = (\operatorname{tr} B) \cdot A + (\operatorname{tr} A) \cdot B + (\operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr} A \cdot \operatorname{tr} B) \cdot I_2 = (\operatorname{tr} B) \cdot A + (\operatorname{tr} A) \cdot B$, deci $0 = \det(AB + BA) = \det((\operatorname{tr} B) \cdot A + (\operatorname{tr} A) \cdot B) \overset{(1)}{=} (\operatorname{tr} B)^2 \cdot \det(A) + (\operatorname{tr} A)^2 \cdot \det(B) + (\operatorname{tr} A \cdot \operatorname{tr} B)^2 - \operatorname{tr} A \cdot \operatorname{tr} B \cdot \operatorname{tr}(AB) = (\operatorname{tr} A)^2 \cdot \det(B)$, prin urmare $\operatorname{tr} A = 0$. Conform *Teoremei Hamilton-Cayley* rezultă că $A^2 = O_2$, deci $(AB)^2 = A^2B^2 = O_2$, de unde, tot conform *Teoremei Hamilton-Cayley*, rezultă că $\operatorname{tr}(AB) \cdot AB = O_2$, prin urmare $\operatorname{tr}(AB) = 0$, contradicție cu ipoteza. Deci $\det(A) \neq 0$. Atunci din $A^2B = ABA$ prin înmulțire la stânga cu A^{-1} rezultă că $AB = BA$.

Concluzia $AB = BA$ nu rămâne adevărată dacă se renunță la ipoteza $\det(B) \neq 0$, un exemplu în acest sens fiind matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, sau la ipoteza $\operatorname{tr}(AB) \neq 0$, un exemplu în acest sens fiind matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

M 73. *Fie șirul de numere reale pozitive $(x_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}(n^3x_n + nx_n^3) = a$, $a \in \mathbb{R}$. Arătați că șirul $(y_n)_{n\geq 1}$ definit prin $y_n = \dfrac{n^4x_n}{2n+1}$ este convergent și calculați limita sa.*

Dinu Teodorescu, Târgoviște

Soluție. Pentru orice $n \geq 1$ avem $n^3x_n + nx_n^3 \geq 2n^2x_n^2$, deci $x_n^2 \leq \frac{1}{2n^2}(n^3x_n + nx_n^3)$ și $nx_n^2 \leq \frac{1}{2n}(n^3x_n + nx_n^3)$, de unde deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} nx_n^2 = 0$. Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n^3 = 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} n^3x_n = a$ și astfel șirul $y_n = \frac{n}{2n+1}\cdot n^3x_n$ converge către $\frac{a}{2}$.

M 74. *Fie $a, b, c, d \in (0, \infty)$ și șirurile $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ definite prin*

$$x_1 = 0,\ y_1 = 1,\ x_{n+1} = \frac{ax_n + by_n}{a+b},\ y_{n+1} = \frac{cx_n + dy_n}{c+d},\ \forall n \geq 1.$$

Arătați că șirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ și $(y_n)_{n\geq 1}$ sunt convergente, au aceeași limită și calculați această limită.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție (*Leonard Giugiuc*, Drobeta Turnu Severin). Ne propunem să arătăm o metodă generală de calcul al limitelor unor astfel de șiruri recurente.

Teoremă: Fie numerele reale fixate α, β, x și y cu $x, y \in (0,1)$. Considerăm șirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ și $(y_n)_{n\geq 1}$ definite prin $x_1 = \alpha$, $y_1 = \beta$, $x_{n+1} = xx_n + (1-x)y_n$, $y_{n+1} = yx_n + (1-y)y_n$, $\forall\, n \geq 1$. Atunci șirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ și $(y_n)_{n\geq 1}$ sunt convergente și au aceeași limită.

Demonstrație: Avem $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, $\forall\, n \geq 1$, unde $A = \begin{pmatrix} x & 1-x \\ y & 1-y \end{pmatrix}$. De aici deducem că $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^{n-1}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, $\forall\, n \geq 1$. Cum rădăcinile polinomului caracteristic al matricei A sunt 1 și $x-y$, obținem că $A = \frac{1}{1-x+y}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1-x \\ 1 & -y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x-y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & 1-x \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, de unde $A^{n-1} = \frac{1}{1-x+y}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1-x \\ 1 & -y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (x-y)^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & 1-x \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \lim\limits_{n\to\infty} A^{n-1}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \left(\lim\limits_{n\to\infty} A^{n-1}\right)\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. Utilizând că $|x-y| < 1$, avem

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} A^{n-1} &= \frac{1}{1-x+y}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1-x \\ 1 & -y \end{pmatrix}\left[\lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (x-y)^{n-1} \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} y & 1-x \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1-x+y}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1-x \\ 1 & -y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & 1-x \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1-x+y}\cdot\begin{pmatrix} y & 1-x \\ y & 1-x \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Astfel $\lim\limits_{n\to\infty}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \frac{1}{1-x+y}\cdot\begin{pmatrix} y & 1-x \\ y & 1-x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ay+\beta(1-x)}{1-x+y} \\ \frac{ay+\beta(1-x)}{1-x+y} \end{pmatrix}$.

Pentru problema propusă, aplicând teorema pentru $x = \frac{a}{a+b}$, $y = \frac{c}{c+d}$, $\alpha = 0$ și $\beta = 1$ obținem $\lim\limits_{n\to\infty}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b(c+d)}{ac+2bc+bd} \\ \frac{b(c+d)}{ac+2bc+bd} \end{pmatrix}$.

M 75. *Fie $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ două funcții continue, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și fie $(a_n)_{n\geq 0}$ un șir cu $a_n \in [a, b]$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, astfel încât*

$$|f(a_m) - g(a_n)| \leq |a_m - a_n|,$$

pentru orice $m \neq n$, $m, n \in \mathbb{N}$. Arătați că există $c \in [a, b]$ astfel încât $f(c) = g(c)$.

Cristinel Mortici, Târgoviște

Soluție. Șirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este mărginit, deci are un subșir $(a_{n_k})_{k\geq 0}$ convergent. Fie $c=\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$. Cum $a_{n_k}\in[a,b]$ pentru orice $k\in\mathbb{N}$, rezultă că $c\in[a,b]$. Avem $\left|f(a_{n_k})-g(a_{n_p})\right|\leq\left|a_{n_k}-a_{n_p}\right|$, pentru orice $k\neq p$, $k,p\in\mathbb{N}$. Cum funcțiile f și g sunt continue, trecând succesiv la limită $p\to\infty$, $k\to\infty$ rezultă că $|f(c)-g(c)|\leq|c-c|$, deci $f(c)=g(c)$.

Clasa a XII-a

M 76. *Demonstrați că există o infinitate de numere întregi n cu proprietatea că pentru orice număr întreg k, numărul n^3+3kn^2+n+3k este divizibil cu* 2019.

Stelian Corneliu Andronescu și *Costel Bălcău*, Pitești

Soluție. Avem $2019=3\cdot 673$, iar 673 este prim. Conform *Teoremei lui Wilson*, dacă $p=2m+1$ este un număr prim impar atunci $(m!)^2\equiv(-1)^{m+1}\pmod p$, deci $(336!)^2\equiv -1\pmod{673}$. Fie $n=336!+\mathcal{M}2019$. Atunci, pentru orice număr întreg k, $n+3k$ este divizibil cu 3 iar n^2+1 este divizibil cu 673, deci $n^3+3kn^2+n+3k=(n+3k)(n^2+1)$ este divizibil cu 2019.

M 77. *Fie M mulțimea tuturor tripletelor $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ pentru care $a\geq 1\geq b\geq c$, $a+b+c<0$ și $ab+ac+bc=3$.*

a) Arătați că pentru orice $(a,b,c)\in M$ există un unic $t\in[1,\infty)$ astfel încât

$$a+b+c=-\frac{3\left(t^2+1\right)}{2t}.$$

b) Calculați $\max\{a+b+c\mid(a,b,c)\in M\}$.

Leonard Giugiuc și *Diana Trăilescu*, Drobeta Turnu Severin

Soluție. Fie $(a,b,c)\in M$.

a) Din $(a+b+c)^2\geq 3(ab+ac+bc)=3$ și $a+b+c<0$ obținem $a+b+c\leq -3$. Deoarece funcția $f:[1,\infty)\to(-\infty,-3]$, $f(t)=-\dfrac{3\left(t^2+1\right)}{2t}$ este bijectivă, rezultă că există un unic $t\in[1,\infty)$ astfel încât $a+b+c=-\dfrac{3\left(t^2+1\right)}{2t}$.

b) Fie funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=(x-a)(x-b)(x-c)=x^3+\dfrac{3\left(t^2+1\right)}{2t}\cdot x^2+3x-abc$. Avem $0\geq(1-a)(1-b)(1-c)=g(1)=\dfrac{3t^2+8t+3}{2t}-abc$, deci $abc\geq\dfrac{3t^2+8t+3}{2t}$, (1). Pe de altă parte, $g'(x)=3x^2+\dfrac{3\left(t^2+1\right)}{t}\cdot x+3$, deci punctele critice ale funcției g sunt $-t$ și $-\dfrac{1}{t}$. Evident, $-t\leq-\dfrac{1}{t}$. Cum ecuația $g(x)=0$ are rădăcinile a,b,c, iar $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=+\infty$, utilizând *șirul lui Rolle* rezultă că $g(-t)\geq 0$ și $g\left(-\dfrac{1}{t}\right)\leq 0$. Din $g(-t)\geq 0$ obținem $\dfrac{t^3-3t}{2}\geq abc$, (2). Din (1) și (2) rezultă că $\dfrac{t^3-3t}{2}\geq\dfrac{3t^2+8t+3}{2t}$, de unde obținem $(t-3)(t+1)^3\geq 0$, deci $t\geq 3$. Cum funcția f este strict descrescătoare, deducem că $a+b+c=f(t)\leq f(3)=-5$. Astfel $\max\{a+b+c\mid(a,b,c)\in M\}\leq -5$. Dar $(1,-3,-3)\in M$ și $1+(-3)+(-3)=-5$, deci $\max\{a+b+c\mid(a,b,c)\in M\}=-5$.

M 78. *Calculați* $\int \frac{\sqrt[4]{x^2+x^6}}{1-x^4}\,dx$, $x \in (0,1)$.

Daniel Jinga, Pitești

Soluție. Integrala dată se scrie $I = \int \frac{x \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{x^2}+x^2}}{x\left(\frac{1}{x}-x^3\right)}\,dx = \int \frac{\sqrt[4]{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}\cdot\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(\frac{1}{x}-x^3\right)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}\,dx =$
$\int \frac{\sqrt[4]{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)'}{x+\frac{1}{x}-\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)}\,dx = \int \frac{\sqrt[4]{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)'}{\left(x+\frac{1}{x}\right)\left[4-\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\right]}\,dx$. Efectuăm substituția $x+\frac{1}{x}=t$, deci $t>2$ și calculăm integrala $J = \int \frac{\sqrt[4]{t^2-2}}{t\,(4-t^2)}\,dt = \int \frac{t(t^2-2)}{(4t^2-t^4)\,\sqrt[4]{(t^2-2)^3}}\,dt =$
$2\int \frac{(t^2-2)\left(\sqrt[4]{t^2-2}\right)'}{4-(t^2-2)^2}\,dt$. Efectuăm substituția $\sqrt[4]{t^2-2}=y$, deci $y>\sqrt[4]{2}$ și calculăm integrala
$K = \int \frac{y^4}{4-y^8}\,dy = \frac{1}{4}\int \frac{1}{y^4+2}\,dy - \frac{1}{4}\int \frac{1}{y^4-2}\,dy = \frac{1}{4}\int \frac{1}{y^4+2}\,dy - \frac{1}{8\sqrt{2}}\int \frac{1}{y^2-\sqrt{2}}\,dy +$
$\frac{1}{8\sqrt{2}}\int \frac{1}{y^2+\sqrt{2}}\,dy = \frac{1}{4\sqrt{2}}\cdot A - \frac{1}{16\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}}\ln\frac{y-\sqrt[4]{2}}{y+\sqrt[4]{2}} + \frac{1}{8\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}}\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt[4]{2}}$, cu $A = \int \frac{\sqrt{2}}{y^4+2}\,dy$.
Fie $B = \int \frac{y^2}{y^4+2}\,dy$. Atunci $A+B = \int \frac{y^2\left(1+\frac{\sqrt{2}}{y^2}\right)}{y^2\left(y^2+\frac{2}{y^2}\right)}\,dy = \int \frac{\left(y-\frac{\sqrt{2}}{y}\right)'}{\left(y-\frac{\sqrt{2}}{y}\right)^2+2\sqrt{2}}\,dy =$
$\frac{1}{\sqrt[4]{8}}\operatorname{arctg}\frac{y-\frac{\sqrt{2}}{y}}{\sqrt[4]{8}}+\mathcal{C}$. Analog, $A-B = \int \frac{-\left(y+\frac{\sqrt{2}}{y}\right)'}{\left(y+\frac{\sqrt{2}}{y}\right)^2-2\sqrt{2}}\,dy = \frac{1}{2\sqrt[4]{8}}\ln\frac{y+\frac{\sqrt{2}}{y}+\sqrt[4]{8}}{y+\frac{\sqrt{2}}{y}-\sqrt[4]{8}}+\mathcal{C}$.
Prin adunare obținem $A = \frac{1}{2\sqrt[4]{8}}\operatorname{arctg}\frac{y-\frac{\sqrt{2}}{y}}{\sqrt[4]{8}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{8}}\ln\frac{y+\frac{\sqrt{2}}{y}+\sqrt[4]{8}}{y+\frac{\sqrt{2}}{y}-\sqrt[4]{8}}+\mathcal{C}$, prin urmare $I =$
$\frac{1}{8\sqrt[4]{2}}\operatorname{arctg}\frac{y-\frac{\sqrt{2}}{y}}{\sqrt[4]{8}} + \frac{1}{16\sqrt[4]{2}}\ln\frac{y+\frac{\sqrt{2}}{y}+\sqrt[4]{8}}{y+\frac{\sqrt{2}}{y}-\sqrt[4]{8}} - \frac{1}{8\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}}\ln\frac{y-\sqrt[4]{2}}{y+\sqrt[4]{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}}\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt[4]{2}}+\mathcal{C}$,
unde $y = \sqrt[4]{x^2+\frac{1}{x^2}}$.

M 79. *Calculați integrala* $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\,(1+\sin 2x+e^{2x})}{e^{2x}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\,dx$.

Mihai Florea Dumitrescu, Potcoava

Soluție. Avem $I=\sqrt{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\left[(\sin x+\cos x)^2+e^{2x}\right]}{e^{2x}(\sin x+\cos x)}\,dx=\sqrt{2}\underbrace{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-2x}\sin x(\sin x+\cos x)\,dx}_{I_1}$

$+\sqrt{2}\underbrace{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx}_{I_2}$, (1). Dar $I_1=-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}(\sin x+\cos x)\left(e^{-x}(\sin x+\cos x)\right)'\,dx=$

$-\dfrac{e^{-2x}(\sin x+\cos x)^2}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{1-e^{-\pi}}{4}$, (2), iar, utilizând schimbarea de variabilă $\dfrac{\pi}{2}-x=t$, avem $I_2=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\cos t+\sin t}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{\sin t}{\sin t+\sin t}\right)\,dt=t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-I_2$, deci $I_2=\dfrac{\pi}{4}$, (3). Din (1), (2) și (3) obținem că $I=\dfrac{\sqrt{2}\,(\pi+1-e^{-\pi})}{4}$.

M 80. *Un șir de numere reale pozitive $(a_n)_{n\geq 1}$ este descrescător și are proprietatea*

$$(n+2)a_{n+2}+(n+1)a_{n+1}+na_n=\frac{1}{n+1},$$

pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Arătați că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent, cu $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

b) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}n^2a_n$.

c) Dați un exemplu de șir cu proprietatea din enunț.

Andrei Vernescu, București

Soluție. a) Pentru orice $n\geq 1$, din $a_{n+2}\leq a_{n+1}\leq a_n$, rezultă că

$$(3n+3)a_{n+2}\leq(n+2)a_{n+2}+(n+1)a_{n+1}+na_n\leq(3n+3)a_n,$$

adică $(3n+3)a_{n+2}\leq\dfrac{1}{n+1}\leq(3n+3)a_n$, deci $a_{n+2}\leq\dfrac{1}{3(n+1)^2}\leq a_n$. Înlocuind n cu $n-2$ în inegalitatea din partea stângă, rezultă că $\dfrac{1}{3(n+1)^2}\leq a_n\leq\dfrac{1}{3(n-1)^2}$, pentru orice $n\geq 3$. Aplicând *Criteriul cleștelui* obținem că $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, deci șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

b) De asemenea, rezultă că $\dfrac{n^2}{3(n+1)^2}\leq n^2a_n\leq\dfrac{n^2}{3(n-1)^2}$, pentru orice $n\geq 3$, deci aplicând același criteriu obținem că $\lim\limits_{n\to\infty}n^2a_n=\dfrac{1}{3}$.

c) Se verifică ușor că un exemplu de șir cu proprietățile date este $a_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{x^2+x+1}\,dx$.

Probleme propuse pentru liceu

Clasa a IX-a

M 101. Determinați șirurile $(a_n)_{n\geq 0}$ cu proprietatea că

$$a_n(1-a_{n+1}) \leq a_{n+2} \leq a_{n+1}(1-a_n),\ \forall\, n \geq 0.$$

Cristinel Mortici, Viforâta

M 102. Fie $a, b, c > 1$ astfel încât $a+b+c = 2019$. Demonstrați inegalitățile:

a) $\dfrac{1}{a-1} + \dfrac{1}{b-1} + \dfrac{1}{c-1} \geq \dfrac{1}{224}$;

b) $abc + 2 \cdot 673^2 \leq 225(ab+bc+ca)$.

Sorin Ulmeanu, Pitești

M 103. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$ astfel încât $(n-1)\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right) \geq \left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right)^2$. Arătați că $(n-1)\left(a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3\right)^2 \geq \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)^3$.

Leonard Mihai Giugiuc, Drobeta Turnu Severin

M 104. În triunghiul ABC se consideră înălțimile BE și CF, unde $E \in (AC)$, $F \in (AB)$ și fie $D \in (BC)$ astfel încât $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF}$.

a) Arătați că $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AC^2}{AB^2}$.

b) Dacă AD este înălțime, mediană sau bisectoare, atunci $\triangle ABC$ este echilateral.

Daniel Jinga, Pitești

M 105. Demonstrați că în orice triunghi ABC avem

$$\frac{1}{3}\left(\frac{2r}{R}\right)^2 \left(\operatorname{ctg}^2\frac{A}{2} + \operatorname{ctg}^2\frac{B}{2} + \operatorname{ctg}^2\frac{C}{2}\right) \leq \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab} \leq \frac{2r}{3R}\left(\operatorname{ctg}^2\frac{A}{2} + \operatorname{ctg}^2\frac{B}{2} + \operatorname{ctg}^2\frac{C}{2}\right).$$

Marin Chirciu, Pitești

Clasa a X-a

M 106. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\ln\left((n+1)x - 2n\right) = (n+1)\ln x - n\ln 2$.

Marin Chirciu, Pitești

M 107. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Aflați $(a, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ astfel încât $|z| = a \geq \sqrt{2}$ și $az^{n+1} - z^n - a^n = 0$.

Daniel Jinga, Pitești

M 108. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$ și $U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$. Determinați cel mai mic număr natural k astfel încât orice submulțime cu k elemente a mulțimii U_n să conțină patru elemente cu suma egală cu zero.

Marin Ionescu, Pitești

M 109. Rezolvați ecuația $\sin^2 6x \cdot \operatorname{tg} 3x = 2\sin^3 4x$.

Titu Zvonaru, Comănești

M 110. Fie $k \geq -1$ un număr real fixat și fie $\mathcal{S}$ mulțimea triunghiurilor neobtuzunghice. Determinați

$$\min\left\{k(\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C) + \left(\sqrt{\operatorname{ctg} A} + \sqrt{\operatorname{ctg} B} + \sqrt{\operatorname{ctg} C}\right)^2\right\}$$

atunci când $\triangle ABC$ parcurge mulțimea $\mathcal{S}$.

Leonard Mihai Giugiuc, Drobeta Turnu Severin

Clasa a XI-a

M 111. Se consideră matricea $X(a,b) = \begin{pmatrix} 2020 & a & -ab \\ 0 & 2019 & b \\ 0 & 0 & 2020 \end{pmatrix}$, unde $a, b \in \mathbb{C}$.

a) Arătați că există o infinitate de matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ de forma $P = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ astfel încât $P \cdot X(a,b) = X(0,0) \cdot P$.

b) Calculați $(X(a,b))^n$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Stelian Corneliu Andronescu și *Costel Bălcău*, Pitești

M 112. Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ astfel încât $AB = BA$, $\det(A+B) = \det A + \det B$ și $\det(A-B) = \det A - \det B$. Arătați că:

a) $\det(A^3 + B^3) = (\det A + \det B)^3$;

b) $\det(A^3 - B^3) = (\det A - \det B)^3$.

Daniel Jinga, Pitești

M 113. Fie $a, b \in (0, \infty)$, Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{a+b}{n^2}\right) \cdot \left(1 + \dfrac{2a+b}{n^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \dfrac{na+b}{n^2}\right)$.

Marin Chirciu, Pitești

M 114. a) Aflați $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care există limita de funcție $\lim\limits_{x\to\infty} \sin(ax+b)$.

b) Aflați $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care există limita de șir $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(an+b)$.

* * *

M 115. Fie $a, b, c, d \geq 0$ astfel încât $a+b+c+d = 4$.

a) Arătați că $a^2+b^2+c^2+d^2+8\left(\dfrac{abc+abd+acd+bcd}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \geq 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$.

Când are loc egalitatea?

b)* (*problemă deschisă*) Există $k > \dfrac{2}{3}$ astfel încât inegalitatea

$$a^2+b^2+c^2+d^2+8\left(\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}\right)^k \geq 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$

să fie adevărată pentru orice numere a, b, c, d care îndeplinesc condițiile date? În caz afirmativ, determinați valorile lui k.

Leonard Mihai Giugiuc, Drobeta Turnu Severin

Clasa a XII-a

M 116. Fie $\mathcal{H}$ o ramură a unei hiperbole, cu vârful in A. Fie $X, Y \in \mathcal{H}$. Dacă $X \neq Y$, definim $X * Y = Z$, unde Z este al doilea punct de intersecție cu $\mathcal{H}$ al paralelei duse prin A la XY, iar dacă $X = Y$ definim $X * Y = Z$, unde Z este al doilea punct de intersecție cu $\mathcal{H}$ al paralelei duse prin A la tangenta în X la $\mathcal{H}$. Demonstrați că $(\mathcal{H}, *)$ este grup abelian.

* * *

M 117. Fie $a_1, a_3, a_5, \ldots, a_{2019} \in \mathbb{Z}_{17}$. Arătați că ecuația

$$\Big(\ldots\Big(\big((x+a_1)^3+a_3\big)^5+a_5\Big)^7+a_7\ldots\Big)^{2019}+a_{2019}=\widehat{0}$$

are o unică soluție în Z_{17}.

Stelian Corneliu Andronescu și *Costel Bălcău*, Pitești

M 118. Rezolvați în $\mathbb{R}_+^4$ sistemul $\begin{cases} a+b+c+d=2+6\sqrt{3} \\ ab+ac+ad+bc+bd+cd=24 \\ abcd=4 \end{cases}$.

Sladjan Stankovik, Macedonia de Nord

M 119. Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Calculați

$$\int \frac{(a^2-b^2)\sin 2x+2ab\cos 2x}{(b^2-a^2)\cos 2x+2ab\sin 2x-4(a\sin x+b\cos x)+a^2+b^2+2}\,dx,\ x\in I,$$

I fiind un interval arbitrar pe care funcția pentru care se calculează integrala este definită.

Daniel Jinga, Pitești

M 120. Fie $a \in \mathbb{R}$. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \sin(a+x^n)\,dx$.

Alexandru Daniel Pîrvuceanu și *Cezar Alexandru Trăncănău*, elevi, Drobeta Turnu Severin

PROBLEME DE INFORMATICĂ PENTRU CONCURSURI

Probleme propuse

Clasa a IX-a

I 46 (**baza minimă**)**.** Se dă N număr natural cu maxim 16 cifre. Se cere să se determine cea mai mică bază b, în care se poate considera N. Apoi, transformați numărul N din baza b în baza 10.

Exemplu

Pentru $N = 1101$ se va afișa: $b = 2$ $conversie = 13$.

Doru Constantin Pitești

I 47 (**ordonare în baza b**)**.** Se dau două numere naturale N și b ($N \leq 10000$, $1<b<32$) separate prin câte un spațiu pe o linie și N numere naturale în baza b separate prin câte un spațiu pe o altă linie. Se cere să se afișeze numerele în baza b ordonate crescător separate prin câte un spațiu.

Exemplu

Pentru datele:

```
3 16
ED 1A5 BF
```

Se va afișa:

```
BF ED 1A5
```

Ion Alexandru Popescu, București

I 48 (**gruparea elevilor**)**.** Se dau N numere naturale ce reprezintă numerele matricole a N elevi. Se cere să se grupeze elevii, astfel încât orice doi elevi să fie în aceeași grupă, dacă au suma cifrelor numerelor matricole egală. Afisați numerele matricole pe linii diferite, separate prin câte un spațiu, o grupă pe o linie. Ordinea grupelor fiind dată de suma cifrelor numerelor matricole (ordinea este crescătoare).

Cerință

Cunoscând N – numărul de numere matricole și cele N numere matricole, se cere să se afișeze grupele cu numerele matricole conform specificațiilor din enunț.

Date de intrare

În fișierul `matricole.in` se află pe prima linie N număr natural și pe a doua linie cele N numere matricole, separate prin spațiu.

Date de ieșire

Fișierul `matricole.out` va conține pe câte o linie o grupă, în ordinea crecătoare a sumei cifrelor numerelor matricole. Numerele matricole dintr-o grupă vor fi separate prin câte un spațiu.

Restricții și precizări

- $1 \leq N \leq 20000$;
- Numerele matricole sunt numere naturale cu maxim 17 cifre.

Exemplu

matricole.in	matricole.out	Explicație
8 1007 23 701 302 124 43 122 200	200 23 302 122 124 403 1007 701	Elevii se împart în patru grupe de 1, 3, 2 și 2 elevi

Timp maxim de execuție: 0.1 secunde/test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești

I 49 (tabara). Într-o tabără școlară căsuțele sunt așezate una lângă alta. Într-o căsuță sunt cazați elevi din aceeași școală. Pentru a identifica mai ușor căsuțele, organizatorii taberei lipesc pe ușa fiecărei căsuțe codul poștal al școlii de unde provin elevii. La un moment dat se organizează un concurs care necesită determinarea numărului maxim (notat cu A) de căsuțe aflate una lângă alta cu toate codurile poștale numere prime.

Cerință

Cunoscând N - numărul de căsuțe din tabăra școlară și cele N coduri poștale în ordinea așezării lor, se cere să se determine numărul A cu semnificația de mai sus.

Date de intrare

Fișierul `tabara.in` conține pe prima linie numărul de căsuțe N, iar pe a doua linie cele N coduri poștale în ordinea așezării lor, separate prin câte un spațiu.

Date de ieșire

În fișierul `tabara.out` se va scrie numărul A, reprezentând numărul maxim de căsuțe aflate una lângă alta cu toate codurile poștale numere prime.

Restricții și precizări

- $1 \leq N \leq 100000$
- Codurile poștale sunt numere naturale cu maxim 6 cifre

Exemplu

tabara.in	tabara.out	Explicație
7 29 10 2 11 31 29 10	4	Lungimea maximă a unei secvențe de numere prime este 4: 2 11 31 29

Timp maxim de execuție: 1 sec./test.
Memorie totală disponibilă: 2 MB.

Costel Bălcău, Pitești

I 50 (**tema**). Profesorul de matematicăal lui Ionel postează pe o platformă educațională, ca temă la capitolul ecuații cu mai multe variabile o listă cu N - numărul de ecuații și N triplete de numere naturale nenule A B C, pe linii diferite reprezentând coeficienții unei ecuații de forma $Ax + By = C$. Pentru a rezolva tema, Ionel trebuie să determine câte o soluție în mulțimea $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, pentru fiecare ecuație sau să precizați mesajul "nu exista" în cazul în care nu există soluție.

Cerință

Cunoscând N - numărul de ecuații și cele N triplete se cere să se determine câte o soluție pentru fiecare ecuație.

Date de intrare

În fișierul `tema.in` se află pe prima linie N - numărul de ecuații și pe a doua linie cele N triplete, separate printr-un spațiu reprezentând coeficienții ecuațiilor.

Date de ieșire

Fișirerul `tema.out` conține N linii cu câte o soluție x y (separate printr-un spațiu), pentru fiecare ecuație sau textul `nu exista` în cazul în care ecuația nu are soluții.

Restricții și precizări

- $2 \leq n \leq 20000$
- Coeficienții sunt numere naturale cu maxim 5 cifre
- Soluția unei ecuații nu este unică! Se poate afișa orice soluție.

Exemplu

`tema.in`	`tema.out`	Explicație
3 2 20 260 10 100 3 5 0 5	`100 3` nu exista 1 2	2x+20y=260 are soluția x=100 y=3 10x+100y=3 nu are soluție 5x=5 are soluția x=1 y=2

Timp maxim de execuție: 0.1 sec./test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești

Clasa a X-a

I 51 (**fraza**). Pentru ora de limba engleză Ionică trebuie să scrie o frază cu cât mai multe litere distincte. Fraza trebuie alcătuită din cuvinte separate prin câte un spațiu sau punct. După ce scrie fraza Ionică merge la Rică, ca să vadă dacă aceasta îndeplinește condiția impusă de doamna profesoară de engleză.

Cerință

Cunoscând fraza scrisă pe o linie, se cere să se determine numărul de litere distincte, mici și mari ale alfabetului englez folosite în frază.

Date de intrare

În fișierul `fraza.in` se află pe prima linie textul frazei.

Date de ieșire

Fișirerul `fraza.out` va conține pe prima linie numărul reprezentând rezultatul cerinței.

Restricții și precizări

Textul frazei are maxim 100000 caractere (numai litere mici, mari, punct și spațiu).

Exemplu

`fraza.in`	`fraza.out`	Explicație
`Ana and Alina go to school.`	`12`	Fraza are o litera mare: A și 11 litere mici: n, a, d, l, i, g, o, t, s, c, h

Timp maxim de execuție: 0.1 secundă/test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești

I 52 (cuvinte). Pentru ora de limba engleză Tică trebuie să scrie o compunere cu cât mai multe cuvinte cu litere distincte. Compunerea trebuie alcătuită din cuvinte separate prin unul sau mai multe spații. După ce scrie compunerea Tică merge la Rică să determine numărului de cuvinte din compunere, care au numai litere distincte.

Cerință

Cunoscând compunerea scrisă pe o linie, se cere să se determine numărul de cuvinte cu toate literele distincte.

Date de intrare

În fișierul `cuvinte.in` se află pe prima linie textul compunerii.

Date de ieșire

Fișirerul `cuvinte.out` va conține pe prima linie numărul reprezentând rezultatul cerinței.

Restricții

Textul compunerii are maxim 100000 caractere (numai litere mici, litere mari și spațiu).

Exemplu

`cuvinte.in`	`cuvinte.out`	Explicație
`Pitesti are univ`	`2`	Cuvintele cu litere distincte: `are, univ`

Timp maxim de execuție: 0.1 secundă/test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Doru Constantin, Pitești

I 53 (**fractii**). Se dau N fracții prin perechi de numere întregi nenule reprezentând numitorul, respectiv numărătorul lor. Determinați produsul acestor fracții în formă ireductibilă (numărător și numitor).

Cerință

Cunoscând N și perechile de numere ce reprezintă numitorul, respectiv numărătorul fracțiilor, se cere să se determine produsul acestor fracții în formă ireductibilă (numărător și numitor).

Date de intrare

În fișierul `fractii.in` se află pe prima linie N, iar pe următoarele N linii numitorul și numărătorul fiecărei fracții separate printr-un spațiu.

Date de ieșire

Fișirerul `fractii.out` va conține pe prima linie produsul acestor fracții în formă ireductibilă (numărător și numitor separate printr-un spațiu).

Restricții și precizări

$1 \leq N \leq 100000$

Numărătorii și numitorii fracțiilor au maxim 6 cifre, iar fracția rezultat are numitorul și numărătorul cu maxim 17 cifre.

Exemplu

`fractii.in`	`fractii.out`	Explicație

`2`
`10 2`
`3 20`
	`3 4`	(10/2)*(3/20) = 3/4.

Timp maxim de execuție: 0.1 secundă/test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești

I 54 (**egale**). Se dau N numere complexe prin perechi de numere întregi cu maxim două cifre reprezentând părțile reale, respectiv imaginare. Determinați lungimea maximă a unei secvențe de numere complexe, care au același modul.

Cerință

Cunoscând N și perechile de numere ce reprezintă numerele complexe în formatul parte reală parte imaginară, se cere să se determine lungimea maximă a unei secvențe de numere complexe care au același modul.

Date de intrare

În fișierul `egale.in` se află pe prima linie N, iar pe următoarele N linii partea reală și partea imaginară separate printr-un spațiu a fiecărui număr complex.

Date de ieșire

Fișirerul `egale.out` va conține pe prima linie numărul reprezentând rezultatul cerinței.

Restricții și precizări

- $1 \leq N \leq 100000$
- Partea reală și partea imaginară sunt numere întregi cu maxim 5 cifre.
- Prin secvență înțelegem o succesiune de numere complexe aflate pe poziții consecutive în șirul dat.

Exemplu

egale.in	egale.out	Explicație
6 1 2 1 1 1 2 2 1 1 2 1 0	3	$1+2i$ are modulul 5 $1+i$ are modulul 2 $1+2i$ are modulul 5 $2+i$ are modulul 5 $1+2i$ are modulul 5 $1+0*i$ are modulul 1

Timp maxim de execuție: 0.1 secundă/test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Alexandru Ion Popescu, Bucuresti

I 55 (fibo). Se dau a<b, două numere naturale cu maxim 5 cifre și b-a<30. Determinați numărul de șiruri distincte ce se pot obține prin permutarea termenilor din șirul lui Fibonacci ce se găsesc în intervalul [a,b].

Cerință

Cunoscând a și b, determinați numărul de șiruri distincte ce se pot obține prin permutarea termenilor șirului lui Fibonacci ce se găsesc în intervalul [a,b].

Date de intrare

În fișierul `fibo.in` se află pe prima linie a și b numere naturale separate prin câte un spațiu.

Date de ieșire

Fișirerul `fibo.out` va conține pe prima linie numărul din cerință.

Restricții și precizări

- $0 \leq a, b \leq 10000$
- b-$a < 30$.

Exemplu

fibo.in	fibo.out	Explicație
3 7	2	Șirurile sunt 3 5, 5 3

Timp maxim de execuție: 0.1 secundă/test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Doru Constantin, Pitești

Clasele a XI-a și a XII-a

I 56 (**componenta**). Se dă un graf neorientat prin: n numărul de noduri, m numărul de muchii şi nodurile muchiilor ($1 < n < 200$). Notăm cu Nr numărul de grafuri parțiale, pentru o componentă conexă cu număr maxim de muchii.

Cerință

Pentru un graf dat, determinați numărul de cifre al lui Nr, ce reprezintă numărul de grafuri parțiale pentru o componentă conexă cu număr maxim de muchii.

Date de intrare

Pe prima linie a fișierului `componenta.in` se află n şi m cu un spaţiu între ele. Pe următoarele m linii se află perechi de noduri reprezentând muchiile grafului.

Date de ieşire

Pe prima linie a fişierului `componenta.out` se va scrie numărul din cerinţă.

Exemplu

`componenta.in`	`componenta.out`	Explicatie

`5 3`
`4 2`
`1 5`
`5 3`
	`4`	Graful conține două componente conexe.
		O componentă conexă cu 2 muchii
		și o componentă conexă cu o muchie.
		4 este numărul de grafuri parțiale pentru
		componenta conexă cu două muchii.

Timp maxim de execuție: 1 secundă/test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești

I 57 (**saranjam**). Pentru o pereche de numere naturale (a, b) notăm cu aranjam(a, b) numărul de aranjamente de b elemente dintr-o mulțime cu a elemente. Pentru N perechi de numere naturale se cere să se determine suma aranjamentelor date de aceste perechi de numere.

Cerință

Pentru N perechi de numere naturale determinați suma aranjamentelor date de acestea.

Date de intrare

Pe prima linie a fișierului `saranjam.in` se află N şi pe următoarele N linii perechi de numere naturale cu un spaţiu între ele.

Date de ieşire

Pe prima linie a fişierului `saranjam.out` se va scrie numărul din cerinţă.

Restricții și precizări

- $2 \leq N \leq 5000$
- Numerele din fiecare pereche sunt cifre

Exemplu

saranjam.in	saranjam.out	Explicatie
2 3 1 4 2	5	aranjam(3,1) + aranjam(4,2) = 3 + 12 = 15

Timp maxim de execuție: 1 secundă/test.
Memorie totală disponibilă 4 MB.

Alexandru Ion Popescu, București

I 58 (turneu). Se dă un graf orientat prin n numărul de noduri, m numărul de arce şi nodurile arcelor ($1 < n < 150$).

Cerință

Pentru un graf orientat, determinați numărul de componente tari conexe care sunt grafuri turneu.

Date de intrare

Pe prima linie a fisierului `turneu.in` se află n şi m cu un spaţiu între ele. Pe următoarele m linii se află perechi de noduri reprezentând arce.

Date de ieşire

Pe prima linie a fişierului `turneu.out` se va scrie numărul din cerinţă.

Exemplu

turneu.in	turneu.out	Explicatie
8 11 3 1 1 8 8 3 3 4 4 5 5 6 6 7 7 2 2 5 5 7 6 2	2	Graful conține 3 componente tari conexe. Componentele tari conexe care sunt grafuri turneu: 1 3 8 2 5 6 7

Timp maxim de execuție: 1 secundă/test.
Memorie totală disponibilă 4 MB.

Doru Constantin, Pitești

I 59 (**patrate**). Se dau N puncte distincte în plan prin coordonatele lor și culoare. Determinați toate pătratele cu vârfurile în mulțimea de puncte date, care au aceeași culoare.

Cerință

Pentru N puncte în plan date prin coordonatele lor și culoare, determinați numărul de pătrate cu vârfurile în mulțimea de puncte date, colorate la fel.

Date de intrare

Pe prima linie a fișierului `patrate.in` se află N. Pe următoarele N linii se află triplete de numere reprezentând coordonatele (abscisa ordonata) și culoarea punctelor, separate prin câte un spațiu.

Date de ieşire

Pe prima linie a fişierului `patrate.out` se va scrie numărul din cerință.

Restricții și precizări

- $2 \leq N \leq 10000$
- Coordonatele punctelor sunt numere naturale cu maxim 5 cifre
- Culorile sunt date prin numere din mulțimea 0,1,2, ..., 15

Exemplu

patrate.in	patrate.out	Explicație
5 0 0 9 5 0 9 5 5 9 0 5 9 10 0 1	1	Există un singur pătrat cu vârfurile în mulțimea de puncte date colorate la fel, format din primele patru puncte.

Timp maxim de execuție: 1 secundă/test.

Memorie totală disponibilă 2 MB.

Costel Bălcău, Pitești

I 60 (**romb**). Se dau N puncte în plan prin coordonatele lor. Determinați aria maximă a unui romb cu vârfurile în mulțimea de puncte dată.

Cerință

Cunoscând N și perechile de numere ce reprezintă coordonatele a N puncte, determinați aria maximă a unui romb cu vârfurile în mulțimea dată.

Date de intrare

În fișierul `romb.in` se află pe prima linie N, iar pe următoarele N linii abscisa și ordonata separate prin câte un spațiu pentru punctele date.

Date de ieșire

Fișierul `romb.out` va conține pe prima linie numărul reprezentând rezultatul cerinței, trunchiat la două zecimale.

Restricții și precizări

- $1 \leq N \leq 300$
- Coordonatele punctelor sunt numere întregi din mulțimea $[-10000, 10000]$

Exemplu

romb.in	romb.out	Explicație
8 0 10 0 -10 5 0 -5 0 200 0 10 5 15 0 10 -5	100	Se pot desena două romburi. Rombul cu aria maximă (100) are vârfurile în punctele: (0,-5), (0,-10), (5,0), (0,10)

Timp maxim de execuție: 0.1 secundă/test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești

ISTORIOARE DIN LUMEA MATEMATICII ȘI A INFORMATICII

Joseph-Louis Lagrange, ,,piramida grandioasă a științelor matematice"

Stelian Corneliu Andronescu [1]

Plecând de la ideea că Matematica a fost și rămâne nu numai o știință, sau o colecție de rezultate concludente pentru cunoașterea umană, ci și un Proces Uman, de enormă intensitate intelectuală și adesea emoțională, vom puncta câteva aspecte din viața și activitatea științifică a marelui matematician J.-L. Lagrange (1736-1813). Lagrange s-a născut la Torino dintr-o familie care era parțial de origine franceză pe linie paternă. Tatăl său, care inițial fusese bogat, reușise să risipească toată averea familiei, lăsându-și fiul fără nicio moștenire. Ulterior Lagrange avea să spună: ,,Dacă aș fi moștenit vreo avere, probabil nu mi-aș fi bătut capul cu matematica". La Torino, Lagrange a trăit primii 30 de ani ai vieții sale, finalizându-și studiile în 1755 și fiind numit profesor la Școala Regală de Matematică și Artilerie. Interesul pentru matematică a apărut la Lagrange în urma studierii unor cărți mai vechi ale lui E. Halley, în care se vorbește despre folosirea algebrei în optică. La vârsta de 18 ani, în anul 1754 Lagrange publică primul său articol despre analogia între expresia dezvoltării binomului lui Newton și expresia derivatelor de ordin superior pentru produsul a două funcții. Este singurul articol care nu este scris în franceză, toate celelalte note, articole și memorii fiind scrise în franceză. În anul 1759 a contribuit la constituirea Academiei Regale de Științe din Torino.

În anul 1764, Lagrange a obținut un premiu al Academiei de Științe din Paris, ulterior obținând alte premii în anii 1766, 1772, 1774, 1778.

Tot în această perioadă, a avut o bogată corespondență cu L. Euler, pe care îl informa despre progresele sale științifice. Euler a fost impresionat de rezultatele remarcabile ale lui Lagrange, propunând alegerea ca membru al Academiei din Berlin, acest lucru petrecându-se în anul 1756.

După ce Euler a plecat la St. Petersburg, Lagrange i-a succedat în poziția de director al Departamentului de matematicii începând cu 6 noiembrie 1766. Cu această ocazie Frederic cel Mare, cel mai mare rege al Europei cum el ,,modest" spunea despre sine, l-a salutat pe Lagrange, declarând că este o mare cinste să aibă la Curtea sa pe cel mai mare matematician. La Berlin, Lagrange a rămas pentru 21 de ani. Aici a lucrat în mai multe direcții, amintind doar abordarea unor probleme de teoria numerelor: descompunerea unui număr pozitiv într-o sumă de patru pătrate, o generalizare a teoremei lui Wilson și probleme de algebră: rezolvarea prin radicali a unor ecuații de gradul cel mult patru, realizând un prim pas în dezvoltarea teoriei grupurilor, continuată de Galois.

După moartea regelui Frederic cel Mare, în anul 1787, Lagrange acceptă o invitație din Franța,unde rămâne pentru ultimii 26 de ani ai vieții sale. La Paris devine membru al Academiei

[1]Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, corneliuandronescu@yahoo.com

de Științe și supraviețuiește Revoluției franceze.

La Paris, Napoleon Bonaparte l-a apreciat pe cel mai mare și modest matematician al secolului al XVIII-lea, pe care l-a făcut senator, conte al imperiului și cavaler al ordinului Legiunii de Onoare, numindu-l ,,piramida grandioasă a științelor matematice". De altfel, când Napoleon între campaniile militare se ocupa de treburile civile, el deseori conversa cu Lagrange atât despre rolul matematicii în stat, cât pe teme de filozofie.

Lucrările lui Lagrange în matematică, astronomie și mecanică alcătuiesc 14 volume.

Când spunem Lagrange, ne amintim de Teorema lui Lagrange din teoria grupurilor, cunoscută absolvenților de liceu, Teorema de aproximare Lagrange și Teorema celor patru pătrate, Polinomul Lagrange și așa mai departe.

Cu două zile înaintea morții sale, Lagrange și-a rezumat astfel viața: ,,Cariera mea a ajuns la capăt, am dobândit ceva renume în matematică. Nu am urât pe nimeni, nici n-am făcut rău nimănui, pentru mine e bine să ajung la sfârșit".

Semne de adâncă recunoștință aduse marelui matematician Lagrange se găsesc pretutindeni: o placă comemorativă este fixată la primul etaj al Turnului Eiffel, o stradă din Paris îi poartă numele, strada din Torino pe care exista casa în care s-a născut și a locuit se numește via Lagrange.

Bibliografie

[1] M. Livio, *Ecuația ce n-a putut fi rezolvată*, Ed. Humanitas, București, 2007.

[2] Joseph Louis Lagrange - Wikipedia - enciclopedia liberă.

Revistă sponsorizată de

ROWEB Development SRL

și

OSF Global Services SRL